Inhaltsverzeichnis des Bandes 141.

	Seite
Bohr, H., Über die Funktion $\zeta'(s) : \zeta(s)$	217—234
Busche, E., Über die Theorie der biquadratischen Reste	146—161
Föppl, L., Stabile Anordnungen von Elektronen im Atom	251—302
Fraenkel, A., Axiomatische Begründung von *Hensels* p-adischen Zahlen . .	43— 76
Horn, J., Zur Theorie der nicht linearen Differential- und Differenzengleichungen	182—216
Jentzsch, R., Über Integralgleichungen mit positivem Kern	235—244
Lichtenstein, L., Über das *Poisson*sche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials . . .	12— 42
Remak, R., Über eine von Herrn *H. A. Schwarz* angegebene Funktion . .	77— 95
— — Über die Zerlegung der kommutativen Gruppen in zyklische teilerfremde Faktoren	245—250
Schlesinger, L., Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten	96—145
Vogt, W., Metrische Untersuchungen der kubischen Hyperbel, insbesondere der gleichseitigen	303—317
Weyl, H., Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von deren Begrenzung	1— 11
— — Über das Spektrum der Hohlraumstrahlung	163—181

17

256081

520081

Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von deren Begrenzung.

Von Herrn *H. Weyl* in Göttingen.

§ 1.

Ist I ein beliebiges, im Endlichen gelegenes Gebiet*) einer auf die kartesischen Koordinaten x, y bezogenen Ebene, so verstehen wir unter den *Eigenwerten von* I diejenigen Werte λ, für welche die Schwingungsgleichung

$$\Delta u + \lambda u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0 \tag{1.}$$

eine Lösung u besitzt, die am Rande des Gebietes I verschwindet. Diese Eigenwerte bezeichnen wir, der Größe nach geordnet, mit $\lambda_n (n = 1, 2, 3, \ldots;$ $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \cdots)$ oder, wo die Abhängigkeit von I hervorgehoben werden soll, mit $\lambda_n(I)$. Dabei ist in dieser Reihe jeder Eigenwert λ so oft zu schreiben, als es linear unabhängige am Rande verschwindende Lösungen von (1.) gibt.

Über die Abhängigkeit des kleinsten Eigenwerts λ_1 vom Gebiete I hat Herr *H. A. Schwarz* im Jahre 1885**) den Satz bewiesen, daß $\lambda_1(I_1) \geqq \lambda_1(I)$ ist, falls das Gebiet I_1 ganz in I liegt. Hier soll dieselbe Tatsache (nach einer völlig anderen Methode) allgemein für den n-ten Eigenwert λ_n bewiesen werden, und wir wollen den Satz auch noch dadurch verallgemeinern, daß wir an Stelle des *einen* in I gelegenen Gebietes I_1 eine beliebige Menge solcher Gebiete treten lassen. Dann bekommen wir das folgende

*) Unter „Gebiet“ wird eine nur aus inneren Punkten bestehende Punktmenge verstanden, deren Punkte sich untereinander durch ganz im Gebiet verlaufende Streckenzüge verbinden lassen.

**) Festschrift zum Jubelgeburtstage des Herrn *Karl Weierstraß* (Helsingfors 1885), S. 35 = Ges. math. Abhandlungen, Bd. I, S. 261.

Theorem: Ist I ein beliebiges, im Endlichen gelegenes Gebiet und sind $I_1, I_2, \ldots$ endlich- oder unendlichviele) in I gelegene Gebiete, von denen je zwei keinen (inneren) Punkt gemein haben, so liegen unterhalb einer beliebigen Grenze mindestens ebensoviele Eigenwerte von I als von $I_1, I_2, \ldots$ zusammengenommen.*

Bei der Bestimmung der Anzahl der Eigenwerte ist natürlich jeder derselben in seiner richtigen Vielfachheit zu rechnen.

Es bezeichne $G(xy, \xi\eta)$ die zu dem Gebiet I gehörige gewöhnliche *Green*sche Funktion mit der beliebigen innerhalb I gelegenen Unendlichkeitsstelle $(\xi\eta)$; dann sind die Eigenwerte von I zugleich Eigenwerte des symmetrischen Kernes $\frac{1}{2\pi}G$. Die Innengebiete $I_1, I_2, \ldots$ seien zunächst nur in endlicher Anzahl (h) vorhanden. G_1 sei die *Green*sche Funktion von I_1, wobei wir noch $G_1 = 0$ setzen, wenn einer der beiden Punkte $(xy), (\xi\eta)$ nicht innerhalb I_1 liegt; analoge Bedeutung habe G_2 für $I_2, \ldots$, G_h für I_h. Die Eigenwerte des Kerns

$$\frac{1}{2\pi}(G_1 + G_2 + \cdots + G_h)$$

bestehen dann aus den Eigenwerten $\lambda(I_1), \lambda(I_2), \ldots \lambda(I_h)$ zusammengenommen. Um nun den Beweis für die oben ausgesprochene Behauptung zu erbringen, zeigen wir:

I) *$L' = G - (G_1 + G_2 + \cdots + G_h)$ ist im Sinne der Theorie der Integralgleichungen ein positiv-definiter Kern.*

II) *Addieren wir zu einem beliebigen Kern**) K einen positiv-definiten Kern K': $K^* = K + K'$, so liegen unterhalb einer beliebigen Grenze nicht weniger positive Eigenwerte von K^* als von K.*

Setzt man hier $K^* = G$, $K = (G_1 + G_2 + \cdots + G_h)$, $K' = L'$, so ergibt sich zufolge I) unser Theorem.

In § 2 beweise ich den Satz I) mit Hilfe gewisser Überlegungen aus der *Potentialtheorie*, in § 3 den Satz II) mittels der Methoden der *Integralgleichungstheorie.* In § 4 wird aus dem Haupttheorem *das asymptotische Gesetz der Eigenwerte* für ein beliebiges Gebiet abgeleitet. In § 5

*) Eine beliebige Menge sich gegenseitig ausschließender Gebiete ist stets endlich oder abzählbar unendlich.

**) Es ist hier nur von *symmetrischen* Kernen die Rede, für welche die gewöhnliche *Fredholm-Hilbert*sche Theorie gültig ist.

endlich findet sich ein Satz über die zu der Schwingungsgleichung und der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ gehörigen Eigenwerte.

§ 2.

Um die Richtigkeit von I) darzutun, halten wir uns zunächst an *reguläre Fälle;* aus ihnen wird sich hernach der allgemeine Satz *durch Grenzübergang* herleiten lassen.

1. Der Einfachheit halber wollen wir auch zunächst noch annehmen, daß die Gebiete $I; I_1, I_2, \dots I_h$ einfach zusammenhängend sind; sie mögen je von einer *Kurve mit stetiger Krümmung* begrenzt sein, die wir bzw. mit $\mathfrak{C}; \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots \mathfrak{C}_h$ bezeichnen, und die Gebiete $I_1, I_2, \dots I_h$ sollen nicht nur in ihren inneren Punkten verschieden sein, sondern auch die Kurven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots \mathfrak{C}_h$ sollen keinen Punkt untereinander und keinen Punkt mit $\mathfrak{C}$ gemein haben. $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_h$ begrenzen zusammen ein $(h+1)$-fach zusammenhängendes Gebiet I_{h+1}, und es ist

$$I = (I_1 + I_2 + \cdots + I_h + I_{h+1}) + (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \cdots + \mathfrak{C}_h).$$

G_{h+1} sei die zu I_{h+1} gehörige *Green*sche Funktion, wobei wieder $G_{h+1} = 0$ zu setzen ist, wenn einer der beiden Argumentpunkte nicht innerhalb I_{h+1} gelegen ist. Punkte auf den Kurven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots \mathfrak{C}_h$ bezeichnen wir mit s, indem unter s die Bogenlänge von irgend einem festgewählten Anfangspunkt aus verstanden wird; dabei läuft s auf $\mathfrak{C}_1$ von 0 bis l_1, auf $\mathfrak{C}_2$ von l_1 bis $l_1 + l_2$, usw., auf $\mathfrak{c} = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \cdots + \mathfrak{C}_h$ also von 0 bis $l = l_1 + l_2 + \cdots + l_h$.

Es sei $\varphi(xy)$ eine Eigenfunktion des Kerns

$$L = G - (G_1 + G_2 + \cdots + G_h + G_{h+1}):$$

$$(2.) \qquad \varphi(xy) = \frac{\nu}{2\pi} \iint_I L(xy, \xi\eta)\varphi(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$\frac{\nu}{2\pi}$ der Eigenwert, zu dem sie gehört. Wir gehen darauf aus, die Ungleichung $\nu > 0$ herzuleiten. Die Gleichung (2.) zieht die folgenden Eigenschaften der Funktion $\varphi(xy)$ nach sich:

a) in ganz I, außer in den Punkten von $\mathfrak{c}$, ist φ eine harmonische Funktion;

b) am Rande von I, d. h. auf der Kurve $\mathfrak{C}$, nimmt φ den Wert 0 an;

c) φ geht stetig über die Kurven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots \mathfrak{C}_h$ hinüber — es ist nämlich auf diesen

$$(3.) \qquad \varphi(s) = \frac{\nu}{2\pi} \iint_I G(s, \xi\eta)\varphi(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta \;—;$$

d) sowohl die nach der inneren wie die nach der äußeren Normale genommene Ableitung von φ an einer Kurve $\mathfrak{C}_1, \ldots \mathfrak{C}_h$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n_i}$ bzw. $\frac{\partial \varphi}{\partial n_a}$ ist eine stetige Funktion der Bogenlänge s. Den Sprung

$$-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_a}\right) \text{ bezeichnen wir mit } \beta(s).$$

Es ist aber sofort klar, daß die Funktion $\varphi(xy)$ hinsichtlich dieser vier Eigenschaften mit

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{c}} G(s, xy)\, \beta(s)\, ds$$

übereinstimmt und daher überhaupt mit ihr identisch sein muß:

$$\varphi(xy) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{c}} G(s, xy)\, \beta(s)\, ds. \tag{4.}$$

In dieser Gleichung liegt der Kernpunkt unseres Beweises.

Wir berechnen jetzt das Integral

$$\iint_I \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy.$$

Es ist z. B.

$$\iint_{I_1} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = -\int_{\mathfrak{C}_1} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_i}\, ds;$$

ähnlich für $I_2, \ldots, I_h$. Für I_{h+1} gilt, weil φ auf $\mathfrak{C}$ den Wert 0 hat,

$$\iint_{I_{h+1}} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = -\int_{\mathfrak{c}} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_a}\, ds.$$

Durch Addition ergibt sich

$$\iint_I \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = \int_{\mathfrak{c}} \varphi(s)\, \beta(s)\, ds. \tag{5.}$$

Hierin drücken wir jetzt $\varphi(s)$ mittels (3.) und (4.) aus:

$$\varphi(s) = \frac{\nu}{4\pi^2} \int_{\mathfrak{c}} GG(s, \sigma)\, \beta(\sigma)\, d\sigma \qquad \left\{GG(s, \sigma) = \iint_I G(s, xy)\, G(\sigma, xy)\, dx\, dy\right\}$$

und bekommen

$$\iint_I \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = \frac{\nu}{4\pi^2} \iint_{\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}} GG(s, \sigma)\, \beta(s)\, \beta(\sigma)\, ds\, d\sigma. \tag{6.}$$

Quadriert man (4.) und integriert, so bekommt man andrerseits

$$\iint_I \varphi(xy)^2\, dx\, dy = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}} GG(s, \sigma)\, \beta(s)\, \beta(\sigma)\, ds\, d\sigma. \tag{7.}$$

Aus (6.) und (7.) folgt $\nu > 0$. Demnach ist für jede in I einschließlich des Randes stetige Funktion $u(xy)$

$$\iint_I \iint_I L(xy, \xi\eta) u(xy) u(\xi\eta) dx\, dy\, d\xi\, d\eta \geqq 0,$$

und da G_{h+1} positiv-definit ist, folgt a fortiori, daß $L' = L + G_{h+1}$ den gleichen Charakter besitzt:

$$\iint_I \iint_I L'(xy, \xi\eta)\, u(xy)\, u(\xi\eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta \geqq 0.$$

Der gleiche Beweis gilt auch, wenn $I; I_1, I_2, \ldots I_h$ beliebige mehrfach zusammenhängende, von endlich vielen stetig gekrümmten Kurven begrenzte Gebiete vorstellen.

2. Von jetzt ab soll über die Begrenzung der in Betracht kommenden Bereiche $I; I_1, I_2, \ldots I_h$ keine einschränkende Voraussetzung mehr gemacht werden; doch halten wir noch daran fest, daß nur endlichviele Innengebiete I_i vorhanden sind. Wir approximieren dann I durch einen von endlichvielen stetig gekrümmten Kurven begrenzten Bereich $I^{(\varepsilon)}$, der von dem positiven Parameter ε so abhängig ist, daß der Bereich mit abnehmendem ε beständig wächst und $\lim_{\varepsilon=0} I^{(\varepsilon)} = I$ ist. Es soll also $I^{(\varepsilon)}$ samt seiner Begrenzung innerhalb $I^{(\delta)}$ gelegen sein, wenn $\delta < \varepsilon$ ist, und es soll zu jedem Punkt P von I einen Wert $\varepsilon > 0$ geben, so daß P auch in $I^{(\varepsilon)}$ gelegen ist. Entsprechende Bedeutung haben $I_1^{(\varepsilon)}, \ldots I_h^{(\varepsilon)}$ für die Innenbereiche $I_1, \ldots I_h$, wobei noch dafür Sorge zu tragen ist, daß immer $I_1^{(\varepsilon)}, \ldots I_h^{(\varepsilon)}$ Teile von $I^{(\varepsilon)}$ sind. Wir haben zu zeigen, daß für jede in I einschließlich des Randes stetige Funktion $u(xy)$

$$\iint_I \iint_I L'(xy, \xi\eta)\, u(xy)\, u(\xi\eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta \geqq 0$$

ist, und zwar in dem folgenden Sinne:

$$\lim_{\varepsilon=0} L_\varepsilon\langle u\rangle \equiv \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \iint_{I^{(\varepsilon)}} \iint_{I^{(\varepsilon)}} G(xy, \xi\eta)\, u(xy)\, u(\xi\eta)\, dx\, dy\, d\xi\, dy - \sum_{i=1}^{h} \iint_{I_i^{(\varepsilon)}} \iint_{I_i^{(\varepsilon)}} G_i(xy, \xi\eta)\, u(xy)\, u(\xi\eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta \right\} \geqq 0. \tag{8.}$$

Die zu $I^{(\varepsilon)}; I_i^{(\varepsilon)}$ gehörigen *Green*schen Funktionen seien $G^{(\varepsilon)}; G_i^{(\varepsilon)}$. $L_{\varepsilon,\delta}\langle u\rangle$ bedeutet denjenigen Ausdruck, der aus $L_\varepsilon\langle u\rangle$ entsteht, wenn man $G; G_i$ durch $G^{(\delta)}; G_i^{(\delta)}$ $(\delta \leqq \varepsilon)$ ersetzt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß irgend zwei Punkte aus I stets eine Entfernung < 1 voneinander haben und daß $\iint_I u(xy)^2\, dx\, dy \leqq 1$ ist.

Für jedes δ gilt, wie wir wissen,

(9.) $$L_{\delta\delta}\langle u\rangle \geqq 0.$$

Um daraus eine Ungleichung für $L_{\varepsilon,\delta}\langle u\rangle$ $(\varepsilon > \delta)$ herzustellen, bemerken wir folgendes: da

$$|G^{(\delta)}(xy,\xi\eta)| \leqq \lg\frac{1}{r} \qquad \left\{r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right\}$$

ist, liefert die sog. *Schwarz*sche Ungleichung

$$\left(\iiiint\limits_{(I^{(\delta)}I^{(\delta)}-I^{(\varepsilon)}I^{(\varepsilon)})} G^{(\delta)}(xy,\xi\eta)\,u(xy)\,u(\xi\eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta\right)^2$$

$$\leqq \iiiint\limits_{(I^{(\delta)}I^{(\delta)}-I^{(\varepsilon)}I^{(\varepsilon)})} \left(\lg\frac{1}{r}\right)^2 dx\,dy\,d\xi\,d\eta.$$

Nun wächst

$$A^{(\varepsilon)} = \iint\limits_{I^{(\varepsilon)}}\iint\limits_{I^{(\varepsilon)}} \left(\lg\frac{1}{r}\right)^2 dx\,dy\,d\xi\,d\eta,$$

wenn ε gegen 0 abnimmt, beständig, bleibt dabei aber unterhalb einer endlichen Grenze $\left(\frac{\pi^2}{2}\right)$ und konvergiert also für $\lim \varepsilon = 0$ gegen eine endliche Zahl A. Entsprechendes läßt sich für die $I_i^{(\varepsilon)}$ und zugehörigen $G_i^{(\varepsilon)}$ durchführen; wir schreiben

$$\iint\limits_{I_i^{(\varepsilon)}}\iint\limits_{I_i^{(\varepsilon)}} \left(\lg\frac{1}{r}\right)^2 dx\,dy\,d\xi\,d\eta = A_i^{(\varepsilon)}, \quad \lim_{\varepsilon=0} A_i^{(\varepsilon)} = A_i.$$

Aus (9.) erhalten wir dann die Beziehung

$$L_{\varepsilon,\delta}\langle u\rangle \geqq -\sqrt{A^{(\delta)}-A^{(\varepsilon)}} - \sum_{i=1}^{h}\sqrt{A_i^{(\delta)}-A_i^{(\varepsilon)}},$$

ferner durch den Grenzübergang $\lim \delta = 0$, da $G^{(\delta)}$ für Punkte (xy), $(\xi\eta)$ in $I^{(\varepsilon)}$ gleichmäßig gegen G konvergiert und entsprechendes für $G_i^{(\delta)}$ zutrifft,

$$L_\varepsilon\langle u\rangle \geqq -\sqrt{A-A^{(\varepsilon)}} - \sum_{i=1}^{h}\sqrt{A_i-A_i^{(\varepsilon)}},$$

endlich durch den Grenzübergang $\lim \varepsilon = 0$:

(8.) $$\lim_{\varepsilon=0} L_\varepsilon\langle u\rangle \geqq 0.$$

§ 3*).

Wir kommen zum Beweise des Satzes II) (§ 1) und nehmen hier statt eines Punktes der xy-Ebene, der in einem Gebiet I variiert, der einfacheren Schreibweise wegen eine einzige Variable s, die sich im Inter-

*) Vgl. zum Inhalt dieses Paragraphen eine demnächst in den Math. Ann. erscheinende Arbeit des Verfassers (§ 1).

vall von 0 bis 1 bewegt. Es handelt sich dann um drei symmetrische Kerne

$$K^*(s,t), \quad K(s,t), \quad K'(s,t), \quad [0 \leqq \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \leqq 1]$$

zwischen denen die Identität

$$K^* = K + K'$$

besteht, und von denen der letzte positiv-definit ist. Die positiven Eigenwerte von K^* mögen, der Größe nach geordnet, $\lambda_1^* \leqq \lambda_2^* \leqq \cdots$ sein und $\varphi_1^*(s), \varphi_2^*(s), \ldots$ die zugehörigen normierten Eigenfunktionen*); $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots$ und $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ haben die analoge Bedeutung für den Kern K. Es ist zu zeigen, daß allgemein $\lambda_{n+1}^* \leqq \lambda_{n+1}$ wird. Wir haben

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(K^*(s,t) - \frac{\varphi_1^*(s)\varphi_1^*(t)}{\lambda_1^*} - \cdots - \frac{\varphi_n^*(s)\varphi_n^*(t)}{\lambda_n^*}\right) x(s)\,x(t)\,ds\,dt \leqq \frac{1}{\lambda_{n+1}^*}$$

für alle Funktionen $x(s)$, deren Quadratintegral $\int_0^1 x^2\,ds \leqq 1$ ist. Da nach Voraussetzung

$$\int_0^1 \int_0^1 K'(s,t)\,x(s)\,x(t)\,ds\,dt \geqq 0$$

ist, gilt a fortiori

$$\text{(10.)} \quad \int_0^1 \int_0^1 \left(K(s,t) - \frac{\varphi_1^*(s)\varphi_1^*(t)}{\lambda_1^*} - \cdots - \frac{\varphi_n^*(s)\varphi_n^*(t)}{\lambda_n^*}\right) x(s)\,x(t)\,ds\,dt \leqq \frac{1}{\lambda_{n+1}^*}.$$

Wir bilden jetzt mittels konstanter Größen $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ die lineare Kombination der $n+1$ ersten Eigenfunktionen von K:

$$x(s) = x_1\varphi_1(s) + x_2\varphi_2(s) + \cdots + x_{n+1}\varphi_{n+1}(s),$$

bestimmen die Verhältnisse der $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ gemäß den n linearen homogenen Gleichungen

$$\int_0^1 x(s)\,\varphi_i^*(s)\,ds = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

und sorgen schließlich dafür, daß die normierende Bedingung

$$\int_0^1 x(s)^2\,ds \equiv x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$$

erfüllt ist. Setzen wir die so konstruierte Funktion $x(s)$ in die linke Seite von (10.) ein, so geht diese über in

$$\int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\,x(s)\,x(t)\,ds\,dt = \frac{x_1^2}{\lambda_1} + \frac{x_2^2}{\lambda_2} + \cdots + \frac{x_{n+1}^2}{\lambda_{n+1}}$$

---

*) D. h. es sollen die Orthogonalitätsrelationen $\int_0^1 \varphi_h^*(s)\,\varphi_i^*(s)\,ds = 0 \ (h \neq i)$, $\int_0^1 (\varphi_h^*(s))^2\,ds = 1$ bestehen.

und ist also

$$\geqq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2}{\lambda_{n+1}} = \frac{1}{\lambda_{n+1}};$$

daher

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}} \leqq \frac{1}{\lambda_{n+1}^*}, \quad \lambda_{n+1}^* \leqq \lambda_{n+1}.$$

Damit ist der Beweis unseres Haupttheorems erledigt für den Fall, daß es sich nur um endlichviele Gebiete $I_1, I_2, \ldots$ handelt. Sind innerhalb I *unendlichviele* solcher Gebiete abgegrenzt, so besitzen bei gegebenem N doch nur *endlichviele* (nämlich höchstens h; $h =$ Anzahl der unterhalb N gelegenen Eigenwerte von I) dieser Gebiete überhaupt Eigenwerte, welche $< N$ sind. Damit ist das Theorem in vollem Umfang bewiesen.

§ 4.

Aus unserm Haupttheorem, das mir an sich des Interesses wert scheint, wollen wir jetzt noch das folgende *asymptotische Gesetz* herleiten:

Hat das zweidimensionale endliche Gebiet I einen bestimmten Flächeninhalt I [im *Jordan*schen Sinne*)], *so gilt für die Eigenwerte* $\lambda_n = \lambda_n(I)$ *dieses Gebietes die Limesgleichung*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \frac{4\pi}{I}. \tag{11.}$$

Dieses Gesetz habe ich bereits nach einer anderen Methode bewiesen**). Die hier darzulegende ist einfacher als jene, dafür allerdings auch wesentlich spezieller: die übrigen in der zitierten Arbeit von mir behandelten analogen asymptotischen Probleme sind ihr nicht zugänglich.

Unsere Behauptung läßt sich auch so aussprechen: Die Anzahl $h_N(I)$ der unterhalb N gelegenen Eigenwerte des Gebietes I ist asymptotisch $= \frac{I}{4\pi} \cdot N$, d. h. es ist

$$\lim_{N=\infty} \frac{h_N(I)}{N} = \frac{I}{4\pi}. \tag{12.}$$

1) Ist I ein Quadrat von der Seitenlänge a, so trifft dies zu. Die Eigenwerte eines solchen Quadrats werden nämlich durch die Formel

$$\frac{\pi^2}{a^2}(m^2 + n^2) \qquad \left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} = 1, 2, 3, \ldots \text{ in inf.}\right]$$

*) *Jordan,* Cours d'analyse (2. Aufl.), Bd. I, S. 28 u. 29.

**) Vgl. meine oben erwähnte Arbeit in den Math. Ann., § 3.

geliefert. Daraus folgt mit Hilfe einer bekannten einfachen zahlengeometrischen Betrachtung die Gleichung (12.) $[I = a^2]$.

2) Bedecken wir die Ebene mit einem Quadratnetz von der Seitenlänge a und ist I ein Bereich, der aus endlichvielen, etwa H, solcher Quadrate zusammengesetzt ist, so besteht auch für ihn die Gleichung (12.). Zunächst haben wir nämlich nach unserm Hauptheorem, wenn jetzt q ein einzelnes Quadrat des Netzes bezeichnet,

$$h_N(I) \geqq H \cdot h_N(q),$$

und da

$$\lim_{N=\infty} \frac{h_N(q)}{N} = \frac{a^2}{4\pi},$$

folgt

$$\text{(13.)} \qquad \liminf_{N=\infty} \frac{h_N(I)}{N} \geqq \frac{Ha^2}{4\pi} = \frac{I}{4\pi}.$$

Den Bereich I können wir durch Hinzufügung endlichvieler Bereiche $I', I'', \ldots$, deren jeder gleichfalls aus Quadraten des Netzes besteht, zu einem vollen Quadrat Q ergänzen (dessen Seitenlänge natürlich ein ganzzahliges Vielfaches von a ist). Dann haben wir

$$h_N(Q) \geqq h_N(I) + h_N(I') + h_N(I'') + \cdots,$$

$$\lim_{N=\infty} \frac{h_N(Q)}{N} = \frac{Q}{4\pi}; \quad \liminf_{N=\infty} \frac{h_N(I')}{N} \geqq \frac{I'}{4\pi}, \quad \liminf_{N=\infty} \frac{h_N(I'')}{N} \geqq \frac{I''}{4\pi}, \ldots.$$

Aus diesen Tatsachen ergibt sich

$$\text{(14.)} \qquad \limsup_{N=\infty} \frac{h_N(I)}{N} \leqq \frac{Q-(I'+I''+\cdots)}{4\pi} = \frac{I}{4\pi},$$

und aus (13.) und (14.) die Gleichung (12).

3) Ist endlich I ein beliebiger im Endlichen gelegener Bereich, so überdecken wir die Ebene wiederum mit einem Quadratnetz von kleiner Seitenlänge. Ist dann I' ein ganz innerhalb I gelegener, aus Quadraten dieses Netzes zusammengesetzter Bereich, I'' ein aus endlichvielen solchen Quadraten zusammengesetztes Gebiet, das I umfaßt, so ist

$$h_N(I') \leqq h_N(I) \leqq h_N(I'').$$

Da für I' und I'' Formel (12.) zutrifft, ergibt sich daraus, wenn $\bar{I}$ den „inneren“, $\overset{+}{I}$ den „äusseren“ Flächeninhalt*) von I bedeutet,

$$\liminf_{N=\infty} \frac{h_N(I)}{N} \geqq \frac{\bar{I}}{4\pi}, \quad \limsup_{N=\infty} \frac{h_N(I)}{N} \leqq \frac{\overset{+}{I}}{4\pi}.$$

*) *Jordan*, Cours d'analyse (2. Aufl.), Bd. I, S. 28 u. 29.

Hat das Gebiet einen bestimmten Inhalt $I = \dot{I} = \bar{I}$, so haben wir damit (12.) allgemein bewiesen.

§ 5.

Die vorigen Betrachtungen lassen sich ohne alle Schwierigkeiten auf drei oder mehr Dimensionen übertragen. Auch darf an Stelle der gewöhnlichen Schwingungsgleichung in den Untersuchungen der §§ 1—3 eine beliebige sich selbst adjungierte Differentialgleichung treten:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) - qu + \lambda ku = 0,$$

wo λ der Spektrumsparameter ist, p, q, k aber stetige Funktionen von (xy) bedeuten, von denen p und k positiv sind. Auf Grund der so gewonnenen Sätze läßt sich jedoch nur dann nach Art des § 4 das asymptotische Gesetz der Eigenwerte dieses allgemeineren Differentialausdrucks herleiten, wenn dasselbe für ein aus einem einzigen Quadrat bestehendes Gebiet bekannt ist. Um das Gesetz in diesem *speziellen Falle* zu finden, kann man, soviel ich sehe, keinen anderen Weg einschlagen als denjenigen, auf dem ich in meiner oben zitierten Annalenarbeit den Beweis *allgemein* erbracht habe.

Zum Schluß wollen wir noch die zu $\Delta u + \mu u = 0$ und der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ (normale Ableitung von u am Rande $= 0$) gehörigen Eigenwerte $\mu = \mu_1, \mu_2, \ldots$ mit den zu der Randbedingung $u = 0$ gehörigen λ_n vergleichen. Die μ sind wieder der Größe nach geordnet, so daß $0 = \mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \cdots$ ist. Das Gebiet I, welches wir betrachten, sei von einer oder mehreren stetig gekrümmten Linien begrenzt. Wir wollen zeigen:

Unterhalb einer beliebigen Grenze liegen mindestens ebenso viele Eigenwerte μ_n als λ_n.

Zum Beweise benutzen wir die beiden zu der Differentialgleichung

$$\Delta u - u = 0 \tag{15.}$$

gehörigen *Green*schen Funktionen $\tilde{G}(xy, \xi\eta)$ und $\tilde{H}(xy, \xi\eta)$, von denen die erste der Randbedingung $u = 0$, die zweite der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ entspricht.

Die Eigenwerte der symmetrischen Kerne $\frac{1}{2\pi}\tilde{G}$, $\frac{1}{2\pi}\tilde{H}$ werden durch $\lambda_n + 1$, bezw. $\mu_n + 1$ geliefert. Wir müssen also dartun, daß $\tilde{H}$ unterhalb einer beliebigen Grenze mindestens ebenso viele Eigenwerte wie $\tilde{G}$ besitzt, und wir werden dies darauf zurückzuführen suchen, daß

$$D = \tilde{H} - \tilde{G}$$

ein positiv-definiter Kern ist.

Wir verfahren genau wie in § 2. Bedeutet ν einen Eigenwert von $\frac{1}{2\pi}D$ und $\varphi(xy)$ die Eigenfunktion, zu der ν gehört,

$$\varphi(xy) = \frac{\nu}{2\pi}\iint_I D(xy, \xi\eta)\,\varphi(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

so ist φ eine im Innern von I reguläre, der Gleichung (15.) genügende Funktion, die am Rande die Werte

$$\varphi(s) = \frac{\nu}{2\pi}\iint_I \tilde{H}(s, \xi\eta)\,\varphi(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta$$

annimmt. Ferner ist die nach der inneren Randnormale genommene Ableitung $\frac{\partial\varphi}{\partial n_s}$ eine stetige Funktion der Bogenlänge s. Aus ihr berechnet sich die Funktion $\varphi(xy)$, wie aus der *Green*schen Formel in bekannter Weise folgt, so:

$$\varphi(xy) = -\frac{1}{2\pi}\int_c \tilde{H}(s, xy)\,\frac{\partial\varphi}{\partial n_s}\,ds.$$

Daraus gewinnen wir der Reihe nach die folgenden Relationen:

$$\varphi(s) = -\frac{\nu}{4\pi^2}\int_c \tilde{H}\tilde{H}(s, \sigma)\,\frac{\partial\varphi}{\partial n_\sigma}\,d\sigma$$

$$\left\{\tilde{H}\tilde{H}(s, \sigma) = \iint_I \tilde{H}(s, xy)\,\tilde{H}(\sigma, xy)\,dx\,dy\right\},$$

$$\iint_I \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \varphi^2\right] dx\,dy = -\int_c \varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n_s}\,ds$$

$$= \frac{\nu}{4\pi^2}\iint_c \tilde{H}\tilde{H}(s, \sigma)\,\frac{\partial\varphi}{\partial n_s}\,\frac{\partial\varphi}{\partial n_\sigma}\,ds\,d\sigma = \nu\iint_I \varphi^2\,dx\,dy,$$

$$\nu \geqq 1.$$

Damit sind wir am Ziel.

Über das *Poisson*sche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials.

Von Herrn *L. Lichtenstein* in Berlin.

Es seien r und φ die polaren Koordinaten eines Punktes in der Ebene, K der Kreis vom Halbmesser R um den Koordinatenursprung, R und θ die laufenden Koordinaten eines Punktes auf dem Umfange S von K, $f(\theta)$ eine nicht notwendig beschränkte, integrierbare Funktion*).

In seiner bekannten Arbeit über die trigonometrischen und die Potenzreihen hat Herr *Fatou* einige bemerkenswerte Sätze über das Verhalten des *Poisson*schen Integrals

$$(1.) \qquad u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2} f(\theta)\, d\theta$$

und seiner partiellen Ableitungen $\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial \varphi^2}$ am Kreisumfange abgeleitet**).

Es bezeichne $v(r,\varphi)$ die zu $u(r,\varphi)$ komplementäre Potentialfunktion. Herr *Fatou* beweist den folgenden Satz:

---

*) Die in dieser Arbeit vorkommenden Integrale sind, wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich betont ist, stets als Integrale im *Lebesgue*schen Sinne aufzufassen. Der Ausdruck „integrierbare Funktionen“ soll somit beschränkte, oder nicht beschränkte Funktionen, die im *Lebesgue*schen Sinne integrierbar sind (fonctions sommables) bezeichnen.

Die Mengen vom Maße Null werden kürzer Nullmengen genannt.

**) Vgl. *Fatou*, Séries trigonométriques et séries de *Taylor*, Acta Mathematica, 1906, Bd. 30, S. 335—400.

Damit für einen bestimmten Wert des Winkels θ

(2.) $$\lim_{r=R} v(r,\theta)$$

existiert, ist, wenn $f(\theta)$ als überall stetig vorausgesetzt wird, notwendig und hinreichend, daß der Ausdruck

(3.) $$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{\pi} |f(\theta+t)-f(\theta-t)| \operatorname{cotg}\frac{t}{2}\, dt$$

existiert*). An einer anderen Stelle der vorhin zitierten Abhandlung zeigt sodann Herr *Fatou*, daß, wenn die Funktion $f(\theta)$ eine endliche untere Grenze hat und nebst ihrem Quadrate integrierbar ist, der Grenzwert (2.) höchstens mit Ausnahme einer gewissen Nullmenge der Punkte (R,θ) wirklich existiert**).

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst das Verhalten der partiellen Ableitung $\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}$ und der Ausdrücke

(4.) $$(R-r)\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \varphi}, \quad (R-r)\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}$$

an der Kreisperipherie betrachtet.

Hat $f(\theta)$, außer vielleicht in einer Nullmenge, eine nebst ihrem Quadrate integrierbare Ableitung, so konvergiert $\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}$ bei der Annäherung an den Rand längs einer beliebigen die Peripherie nicht berührenden Kurve, außer höchstens in einer Nullmenge der Punkte (R,θ_0), gegen einen wohl bestimmten Grenzwert. Die Grenzfunktion ist nebst ihrem Quadrate integrierbar.

Die Ausdrücke (4.) konvergieren, wenn $f(\theta)$ integrierbar ist, höchstens mit Ausnahme einer gewissen Nullmenge der Punkte (R,θ_0), mit $(R-r)$ gegen Null.

Die vorhin zitierten Sätze von Herrn *Fatou* werden wie folgt vervollständigt und verschärft.

Es sei θ_0 ein Stetigkeitspunkt der nicht notwendig beschränkten integrierbaren Funktion $f(\theta)$. *Damit* (2.) *existiert, ist notwendig und hinreichend, daß der Ausdruck* (3.) *existiert.*

Ist $[f(\theta)]^2$ *integrierbar, so konvergiert* $v(r,\theta)$ *bei der Annäherung an den Rand längs einer beliebigen die Begrenzung nicht berührenden Kurve,*

*) Vgl. a. a. O., S. 360.
**) Vgl. a. a. O., S. 374.

außer etwa in einer Nullmenge der Punkte (R, θ_0) *gegen einen bestimmten Wert* $g(\theta_0)$. *Das Integral* $\int_{-\pi}^{\pi} [g(\theta_0)]^2 d\theta_0$ *existiert.*

Hieraus ergibt sich eine interessante Folgerung:

Ist $[f(\theta)]^2$ *im Riemannschen Sinne integrierbar*), so ist der Grenzwert*

$$(5.) \qquad h(\theta) = \lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{\pi} [f(\theta+t) - f(\theta-t)] \frac{dt}{t},$$

außer höchstens in einer gewissen Nullmenge der Punkte θ, *vorhanden. Die Funktion* $[h(\theta)]^2$ *ist integrierbar.*

Die vorstehenden Betrachtungen führen naturgemäß zu einigen Sätzen über die partiellen Ableitungen des logarithmischen Potentials einer einfachen Linienbelegung für den Fall eines Kreisgebietes, die zum Teil schon früher auf einem anderen Wege von Herrn *Picard* abgeleitet worden sind.

Es sei $P(x, y)$ eine nebst ihrem Quadrate integrierbare Funktion, T_0 ein beliebiges, etwa von einer regulär analytischen Kurve begrenztes endliches Gebiet. Betrachten wir das logarithmische Potential

$$(6.) \qquad U(x, y) = \frac{1}{4\pi} \iint_{T_0} P(\xi, \eta) \log \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\} d\xi d\eta.$$

Nachdem von *Poisson, Gauß, Hölder, Morera* eine Reihe hinreichender Bedingungen für das Vorhandensein der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $U(x, y)$ angegeben worden ist, hat endlich Herr *H. Petrini* in einer ausführlichen im Jahre 1909 veröffentlichten Abhandlung *notwendige* und *hinreichende* Bedingungen dafür aufgestellt, daß diese partiellen Ableitungen existieren**).

Es sei $P(x, y)$ beschränkt, im *Riemann*schen Sinne integrierbar und in einer Umgebung des Punktes (x, y) auf jedem von ihm ausgehenden Halbstrahle stetig. Alsdann sind $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ dann und nur dann vor-

---

*) Es kann sich hierbei auch um ein uneigentliches Integral handeln.

**) Vgl. *H. Petrini*, Les dérivées premières et secondes du potentiel logarithmique, Journal de Mathématiques pures et appliquées, Sér. VI, T. V (1909), S. 127—223. Die analogen Sätze für das *Newton*sche Potential enthält die andere Arbeit von Herrn *Petrini*, Les dérivées premières et secondes du potentiel, Acta Mathematica, Bd. 31 (1908), S. 127—332.

handen, wenn der Ausdruck

$$\lim_{\tau=0} \iint_{T_0-\tau} P(\xi,\eta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}\, d\xi\, d\eta$$

existiert. Hierin bezeichnet τ einen kleinen Kreis um (x,y). Ist diese Bedingung erfüllt, so ist in (x,y)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = P(x,y). \tag{7.}$$

Damit die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ existieren, ist notwendig und hinreichend, daß der Grenzwert

$$\lim_{\tau=0} \iint_{T_0-\tau} P(\xi,\eta) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}\, d\xi\, d\eta$$

existiert.

Ich beweise den folgenden Satz:

Es sei $P(x,y)$, wie vorhin, eine nebst ihrem Quadrate integrierbare Funktion. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ sind, außer höchstens in einer gewissen Nullmenge (Q) von Punkten (x,y), vorhanden und nebst ihren Quadraten integrierbar. In der zum Gebiete T_0 gehörigen Komplementärmenge von (Q) besteht die Gleichung (7.).

Ein ähnliches, wenn auch etwas weniger einfaches Verhalten, zeigen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$.

Durch den vorstehenden Satz scheint das alte Problem der Existenz der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials in gewissem Sinne definitiv erledigt zu sein.

Für alle Funktionen $P(x,y)$, die in dem ganzen Gebiete T_0 stetig sind, ergibt sich schließlich der folgende interessante Satz:

Der Grenzwert

$$k(x,y) = \lim_{\tau=0} \iint_{T_0-\tau} P(\xi,\eta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}\, d\xi\, d\eta \tag{8.}$$

ist, außer etwa in einer gewissen Nullmenge der Punkte (x,y), vorhanden.

§ 1.

Es mögen, wie in der Einleitung, r und φ die Polarkoordinaten eines Punktes in der Ebene, K der Kreis vom Halbmesser R um den

Koordinatenursprung, K und θ die laufenden Koordinaten eines Punktes auf dem Umfange S von K, $f(\theta)$ irgendeine integrierbare Funktion bezeichnen. Diese Funktion, die zunächst etwa in dem Intervalle $0 \leqq \theta < 2\pi$ definiert sein mag, denken wir uns ein für allemal der Gleichung $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$ gemäß für alle θ erklärt. Betrachten wir das *Poisson*sche Integral

$$(1.) \qquad u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} f(\theta)\, d\theta .$$

Nach einem Satze von Herrn *Fatou* konvergiert $u(r,\varphi)$ bei der Annäherung an (R, θ_0) längs einer beliebigen, den Kreisumfang nicht berührenden Kurve gegen den Wert $f(\theta_0)$, wenn $f(\theta_0) = \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{\theta_0}^{\theta_0+h} f(\tau)\, d\tau$, mithin überall, außer höchstens in einer gewissen Nullmenge von Randpunkten *).

Ist im Punkte (R, θ_0) die Ableitung $f'(\theta_0)$ vorhanden, so konvergiert der Ausdruck $\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \varphi}$ bei der vorerwähnten Annäherung an den Rand gegen den Wert $f'(\theta_0)$**). (Ist nur der Grenzwert

$$\lim_{h=0} \frac{f(\theta_0 + h) - f(\theta_0 - h)}{2h} = f_1(\theta_0)$$

vorhanden, so ist jedenfalls

$$\lim_{r=R} \frac{\partial u(r,\theta_0)}{\partial \varphi} = f_1(\theta_0)\text{***}).\text{)}$$

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial \varphi^2}, \quad \frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial r\, \partial \varphi}, \quad \frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial r^2}$$

streben hierbei im allgemeinen keinen bestimmten Grenzwerten zu oder werden unendlich groß. *Wie sofort gezeigt werden wird, ist indessen*

$$\lim_{\substack{r=R \\ \varphi=\theta_0}} (R - r) \frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, \qquad \lim_{\substack{r=R \\ \varphi=\theta_0}} (R - r) \frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial r\, \partial \varphi} = 0,$$

---

*) a. a. O., S. 363 und S. 375.
**) a. a. O., S. 358.
***) a. a. O., S. 347.

$$\lim_{\substack{r=R\\ \varphi=\theta_0}} (R-r)\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial r^2} = 0\text{*)}.$$

Diese Beziehungen sind nicht trivial. Betrachten wir etwa die Funktion $\frac{\partial u(r,\theta_0)}{\partial \varphi}$ und bezeichnen wir sie vorübergehend mit $g(r)$. Alsdann existiert nach dem Satze von Herrn *Fatou* der Wert

$$\text{(9.)} \qquad \lim_{r=R} g(r) = \lim_{r=R} \int_{\frac{1}{2}R}^{r} \frac{dg(r)}{dr}\,dr + g\left(\frac{R}{2}\right).$$

Ist nun überdies bekannt, daß der Ausdruck $(R-r)\frac{dg(r)}{dr}$ sich für $r=R$ überhaupt einem Grenzwerte nähert, so kann dieser, wie man sofort sieht, nur gleich Null sein. Aus der Beziehung (9.) allein folgt indessen nicht, daß

$$\lim_{r=R} (R-r)\frac{dg(r)}{dr}$$

existiert. So nähert sich zum Beispiel der Ausdruck

$$(1-x)\frac{d}{dx}\left[(1-x)\sin\frac{1}{1-x}\right]$$

für $x=1$ keinem bestimmten Grenzwerte, trotzdem der Grenzwert

$$\lim_{x=1} \int_0^x \frac{d}{dx}\left[(1-x)\sin\frac{1}{1-x}\right]dx$$

existiert.

Der Einfachheit halber nehmen wir $\theta_0 = 0$ an und setzen vorübergehend

$$f(\theta) = f(0) + \theta f'(0) + F(\theta) = F_1(\theta) + F(\theta), \quad -\pi < \theta \leq \pi,$$
$$u(r,\varphi) = v_1(r,\varphi) + v_2(r,\varphi),$$
$$v_1(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2} F_1(\theta)\,d\theta,$$
$$v_2(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2} F(\theta)\,d\theta.$$

Es ist nun

$$F(0) = F'(0) = 0,$$
$$\lim_{\substack{r=R\\ \varphi=0}} (R-r)\frac{\partial^2 v_1(r,\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0.$$

---

*) Durch diese Bezeichnung soll angedeutet werden, daß der Punkt (r, φ) sich dem Punkte (R, θ_0) längs einer beliebigen, den Kreisumfang nicht berührenden Kurve nähert.

Wir dürfen daher ohne Einschränkung der Allgemeinheit von Anfang an

$$f(0) = f'(0) = 0$$

annehmen. Wie eine einfache Rechnung lehrt, ist

$$(10.) \quad (R-r)\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial \varphi^2} = -\frac{Rr}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{H}\,\frac{f(\theta)}{\theta}\,\frac{(R-r)\theta}{H}\,H_1\,d\theta,$$

$$(11.) \quad \begin{gathered} H = R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2 = (R-r)^2 + 4Rr\sin^2\tfrac{1}{2}(\theta-\varphi), \\ H_1 = \cos(\theta-\varphi) - \frac{4Rr\sin^2(\theta-\varphi)}{H}. \end{gathered}$$

Es möge k eine beliebige positive Zahl bezeichnen. Für alle hinreichend kleinen Werte $(R-r)$ wird

$$(12.) \quad \left|\frac{\varphi}{R-r}\right| < \frac{k}{R}$$

vorausgesetzt. Aus (11.) folgt

$$(13.)\ H \geqq (R-r)^2,\ H \geqq 4Rr\sin^2\tfrac{1}{2}(\theta-\varphi),\ H \geqq 4(R-r)\sqrt{Rr}\,\left|\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\varphi)\right|,$$

somit

$$(14.) \quad \left|\frac{(R-r)\theta}{H}\right| \leqq \frac{(R-r)|\varphi|}{H} + \frac{(R-r)|\theta-\varphi|}{H} < \frac{k}{R} + \frac{1}{2\sqrt{Rr}}\left|\frac{\frac{1}{2}(\theta-\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi)}\right|.$$

Wir nehmen etwa $r \geqq \frac{R}{2}$, $|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2}$ an. Für alle Werte θ, deren absoluter Betrag $\leqq \pi$ ist, ergibt sich nunmehr aus (14.) die weitere Beziehung

$$(15.) \quad \left|\frac{(R-r)\theta}{H}\right| < \alpha_1,$$

worin α_1 eine bestimmte positive Zahl bezeichnet.

Es ist ferner

$$|H_1| < 1 + \frac{4Rr\sin^2(\theta-\varphi)}{4Rr\sin^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)} = 1 + 4\cos^2\tfrac{1}{2}(\theta-\varphi) < 5,$$

somit

$$(16.) \quad \left|(R-r)\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right| < \frac{5\alpha_1 Rr}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\left|\frac{f(\theta)}{\theta}\right| d\theta.$$

Die im allgemeinen nicht beschränkte, integrierbare Funktion $\left|\frac{f(\theta)}{\theta}\right|$ nähert sich im Punkte $\theta = 0$ stetig dem Werte Null an. Nähert sich nun, wie vorausgesetzt, der Punkt (r,φ) dem Punkte $(R,0)$ der Beziehung (12.) gemäß an, so strebt der Ausdruck auf der rechten Seite der Formel (16.) dem Werte Null zu. Daher ist auch, wie behauptet,

$$\lim_{\substack{r=R\\ \varphi=0}} (R-r)\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial \varphi^2}=0. \tag{17.}$$

Betrachten wir nunmehr den Ausdruck

$$(R-r)\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial r\,\partial \varphi}.$$

Wie eine einfache Rechnung zeigt, ist

$$(R-r)\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial r\,\partial \varphi}=\frac{R}{\pi(R+r)}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{H}\,\frac{\theta\sin(\theta-\varphi)}{H}\,\frac{H_2}{H}\,\frac{f(\theta)}{\theta}\,d\theta, \tag{18.}$$

$$H_2=R^4-6R^2r^2+r^4+2Rr(R^2+r^2)\cos(\theta-\varphi).$$

Es ist nun den Beziehungen (12.) und (13.) gemäß

$$\left|\frac{H_2}{H}\right|=\left|\frac{(R-r)^2}{H}(R^2+4Rr+r^2)-\frac{4Rr(R^2+r^2)\sin^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)}{H}\right|<8R^2$$

und

$$\left|\frac{\theta\sin(\theta-\varphi)}{H}\right|\leqq\left|\frac{\varphi\sin(\theta-\varphi)}{H}\right|+\left|\frac{(\theta-\varphi)\sin(\theta-\varphi)}{H}\right|$$

$$<\frac{k(R-r)}{R}\,\frac{|\sin(\theta-\varphi)|}{4(R-r)\sqrt{Rr}\,|\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi)|}+\frac{2|\theta-\varphi|\,|\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi)|\,|\cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi)|}{4Rr\sin^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)}$$

$$<\frac{k}{2R\sqrt{Rr}}\,|\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\varphi)|+\frac{1}{Rr}\left|\frac{\frac{1}{2}(\theta-\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi)}\right|\,|\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\varphi)|.$$

Für $$r\geqq\frac{R}{2},\quad |\varphi|\leqq\frac{\pi}{2},\quad |\theta|\leqq\pi$$

erhält man hieraus

$$\left|\frac{\theta\sin(\theta-\varphi)}{H}\right|<\alpha_2, \tag{19.}$$

worin α_2 eine bestimmte positive Zahl bezeichnet. Wir finden somit

$$\left|(R-r)\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial r\,\partial\varphi}\right|<\frac{8\alpha_2 R^3}{\pi(R+r)}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{H}\left|\frac{f(\theta)}{\theta}\right|d\theta$$

und hieraus wie oben

$$\lim_{\substack{r=R\\ \varphi=0}} (R-r)\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial r\,\partial\varphi}=0. \tag{20.}$$

Betrachten wir endlich den Ausdruck

$$(R-r)\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial r^2}=-(R-r)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right). \tag{21.}$$

Wie in dem nächstfolgenden Paragraphen fast ohne jede Rechnung gezeigt werden wird, ist

$$(22.) \qquad \lim_{\substack{r=R \\ \varphi=0}} (R-r)\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r} = 0.$$

Hieraus und aus den Gleichungen (17.) und (21.) ergibt sich

$$(23.) \qquad \lim_{\substack{r=R \\ \varphi=0}} (R-r)\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial r^2} = 0.$$

§ 2.

Es möge jetzt $f(\theta)$ eine nicht notwendig beschränkte, integrierbare Funktion bezeichnen. Betrachten wir die partiellen Ableitungen erster Ordnung des *Poisson*schen Integrals

$$(24.) \qquad u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2} f(\theta)\,d\theta.$$

Bei der Annäherung an den Rand streben im allgemeinen die Funktionen $\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}$, $\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \varphi}$ keinen bestimmten Grenzwerten zu, oder werden unendlich groß. Wir beweisen, daß *in allen Punkten* (R, θ_0), *in denen die Funktion* $\Phi(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} f(\tau)\,d\tau$ *eine endliche Ableitung besitzt, somit überall, außer höchstens in einer gewissen Nullmenge, die Beziehungen bestehen:*

$$(25.) \qquad \lim_{\substack{r=R \\ \varphi=\theta_0}} (R-r)\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r} = 0, \quad \lim_{\substack{r=R \\ \varphi=\theta_0}} (R-r)\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \varphi} = 0.$$

Wir nehmen der Einfachheit halber $\int_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau = 0$ an, was offenbar keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Die Funktion $\Phi(\theta)$ erfüllt alsdann die Beziehung $\Phi(\theta+2\pi) = \Phi(\theta)$. Abgesehen höchstens von den Punkten einer gewissen Nullmenge hat $\Phi(\theta)$ eine endliche Ableitung erster Ordnung*).

Es möge insbesondere der Wert

$$\left[\frac{d\Phi(\theta)}{d\theta}\right]_{\theta=\theta_0}$$

existieren. Wir setzen

---

*) Vgl. *Lebesgue*, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, p. 124.

$$(26.)\quad U(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,\Phi(\theta)\,d\theta.$$

Nach dem in § 1 bewiesenen Satze ist

$$(27.)\quad \lim_{\substack{r=R\\ \varphi=\theta_0}}(R-r)\frac{\partial^2 U(r,\varphi)}{\partial r\,\partial\varphi}=0,\qquad \lim_{\substack{r=R\\ \varphi=\theta_0}}(R-r)\frac{\partial^2 U(r,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0.$$

Da nun bekanntlich

$$\frac{\partial U(r,\varphi)}{\partial\varphi}=u(r,\varphi)$$

ist, so gelten in der Tat die Beziehungen (25.).

Es möge $\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial l}$ die partielle Ableitung der Funktion $u(r,\varphi)$ in einer beliebig anzunehmenden, dann aber festzuhaltenden Richtung bezeichnen. Aus (25.) folgt nunmehr, daß, außer höchstens in einer gewissen Nullmenge,

$$(28.)\qquad \lim_{\substack{r=R\\ \varphi=\theta_0}}(R-r)\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial l}=0.$$

Ist die Funktion $f(\theta)$ beschränkt, so stellen die beiden Ausdrücke

$$(29.)\qquad (R-r)\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r},\qquad (R-r)\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial\varphi}$$

und somit auch der Ausdruck

$$(R-r)\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial l}$$

beschränkte Funktionen von r und φ dar.

Es ist

$$(30.)\quad (R-r)\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}=\frac{R}{\pi(R+r)}\int_{-\pi}^{\pi}(R^2-r^2)\frac{H_3}{H^2}f(\theta)\,d\theta,$$

$$H_3=(R-r)^2-2(R^2+r^2)\sin^2\tfrac{1}{2}(\theta-\varphi).$$

Nach (13.) ist aber, wie man leicht sieht,

$$\left|\frac{H_3}{H}\right|<1+\frac{R}{r},$$

daher

$$\left|(R-r)\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right|<\frac{2R}{r}\,\text{Max.}\,|f(\theta)|\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{H}\,d\theta=\frac{2R}{r}\,\text{Max.}\,|f(\theta)|.$$

Für $r\geqq\frac{R}{2}$ ist somit

$$\left|(R-r)\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right|<4\,\text{Max.}\,|f(\theta)|.$$

Da für $r \leqq \frac{R}{2}$ die partielle Ableitung $\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}$ sich stetig verhält, so ist augenscheinlich das Produkt (30.) für alle r und φ beschränkt.

Es ist weiter

$$(R-r)\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(R^2-r^2)\frac{H_4}{H^2}f(\theta)\,d\theta,\quad H_4 = (R-r)\,Rr\sin(\theta-\varphi).$$

Nach (13.) ist

$$\left|\frac{H_4}{H}\right| < \frac{\sqrt{Rr}}{2}\left|\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\varphi)\right| < \frac{R}{2},$$

daher

$$\left|(R-r)\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \varphi}\right| < R\ \text{Max.}\,|f(\theta)|\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{H}\,d\theta = R\ \text{Max.}\,|f(\theta)|.$$

Ist die Funktion $f(\theta)$ überall stetig, so konvergieren die Ausdrücke (29.) gegen Null in gleichem Grade.

Einen vollständigen Beweis der Beziehungen (25.) für gewöhnliche und verallgemeinerte Potentiale in einem drei- und zweidimensionalen Gebiete, unter der Voraussetzung, daß die Randwerte durchaus stetig sind, haben die Herren *Zaremba* und *Hoborski* gegeben*). Die erste der Formeln (25.) ist schon früher von Herrn *Almansi* bei seinen Untersuchungen über die partielle Differentialgleichung $\Delta^{2n}u = 0$**) ohne Beweis angewandt worden.

§ 3.

Es sei $f(\theta)$ eine nicht notwendig beschränkte, samt ihrem Quadrate integrierbare Funktion. Es sei in der Bezeichnungsweise von Herrn *Hurwitz*

$$(31.)\qquad f(\theta) \backsim \frac{b_0}{2} + b_1\cos\theta + b_2\cos 2\theta + \cdots + a_1\sin\theta + a_2\sin 2\theta + \cdots.$$

Wie Herr *Fatou* zuerst bewiesen hat, ist

---

*) Vgl. *S. Zaremba*, Solution générale du problème de *Fourier*, Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie, 1905, S. 70—168; *A. Hoborski*, Całkowanie równania różniczkowego o cząstkowych pochodnych $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, Prace Matematyczno-Fizyczne, 1909, S. 1—141.

**) Vgl. *Almansi*, Sull' integrazione dell' equazione $\Delta^{2n} = 0$, Annali di Matematica, 1898, Bd. 2 (3), S. 1—51.

$$(32.) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(\theta)]^2 d\theta = \frac{b_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)^*).$$

Es sei

$$(33.) \qquad u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2} f(\theta)\, d\theta,$$

$$(34.) \qquad v(r,\varphi) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{Rr\sin(\theta-\varphi)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2} f(\theta)\, d\theta.$$

Die in dem Innern des Kreises K reguläre Potentialfunktion $v(r,\varphi)$ stellt, bis auf eine willkürliche Konstante, den imaginären Teil derjenigen analytischen Funktion dar, deren reeller Teil den Wert $u(r,\varphi)$ hat**).

Es möge zunächst $f(\theta)$ eine endliche untere Grenze haben. In diesem besonderen Falle hat Herr *Fatou* gezeigt, daß, außer höchstens in einer gewissen Menge von Punkten (R,θ_0) vom Maße Null,

$$\lim_{r=R} v(r,\theta_0)$$

existiert und endlich ist.

Wir beweisen nunmehr den folgenden weitergehenden Satz:

Es sei $f(\theta)$ eine nebst ihrem Quadrate integrierbare Funktion und $w(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$ die durch die Gleichungen (33.) *und* (34.) *definierte im Innern von K reguläre analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, deren reeller Teil auf S die Werte $f(\theta)$ annimmt.*

Abgesehen höchstens von einer gewissen Nullmenge, strebt $v(r,\varphi)$ bei der Annäherung an den Rand längs einer beliebigen, die Begrenzung nicht berührenden Kurve einem bestimmten Grenzwerte zu.

Es sei

$$g(\theta_0) = \lim_{\substack{r=R \\ \varphi=\theta_0}} v(r,\varphi).$$

---

*) Vgl. a. a. O., S. 373—379.

**) Ist $f(\theta)$ beschränkt, so gibt es nur *eine* in K reguläre Potentialfunktion $U(r,\varphi)$, die auf S, außer etwa in einer gewissen Nullmenge, die Werte $f(\theta)$ annimmt und in K und auf S *beschränkt* ist. Ist $f(\theta)$ nicht beschränkt, aber integrierbar, so kann man, um die Eindeutigkeit zu gewährleisten, fordern, daß

$$\lim_{r=R}\int_{-\pi}^{\pi}|U(r,\varphi)|\, d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|\, d\theta.$$

(Vgl. *Plancherel*, Remarques sur l'intégration de l'équation $\Delta u = 0$, Bulletin des Sciences Mathématiques, 1910, S. 111—114). In beiden Fällen ist natürlich $U(r,\varphi) = u(r,\varphi)$.

Die Funktion $g(\theta)$ ist nebst ihrem Quadrate integrierbar. Es ist

$$(35.) \qquad g(\theta) \backsim -a_1\cos\theta - a_2\cos 2\theta - \cdots + b_1\sin\theta + b_2\sin 2\theta + \cdots.$$

Der Beweis wird außerordentlich einfach, wenn man sich des bekannten *Fischer-Riesz*schen Satzes bedient.

Da die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

konvergiert, so gibt es dem soeben erwähnten Satze zufolge eine nebst ihrem Quadrate integrierbare Funktion $g(\theta)$, die der Beziehung genügt

$$g(\theta) \backsim -a_1\cos\theta - a_2\cos 2\theta - \cdots + b_1\sin\theta + b_2\sin 2\theta + \cdots.$$

Betrachten wir das *Poisson*sche Integral

$$(36.) \qquad V(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2}\, g(\theta)\, d\theta.$$

Nach dem im Anfang des § 1 zitierten Satze von Herrn *Fatou* ist, außer höchstens in einer gewissen Nullmenge,

$$(37.) \qquad \lim_{\substack{r=R\\ \varphi=\theta_0}} V(r,\varphi) = g(\theta_0).$$

Für $r < R$ ist nun

$$V(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\left[\cos n\varphi\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau)\cos n\tau\, d\tau + \sin n\varphi\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau)\sin n\tau\, d\tau\right]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}[-a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi] = v(r,\varphi).$$

Hiermit ist unsere Behauptung in allen ihren Teilen bewiesen.

Aus den Entwickelungen des § 2 folgt, daß höchstens mit Ausnahme einer gewissen Nullmenge der Punkte (R,θ_0)

$$(38.) \qquad \lim_{\substack{r=R\\ \varphi=\theta_0}} \left|(R-r)\frac{dw(z)}{dz}\right| = 0.$$

Diese Beziehung gilt für alle (R,θ_0), wenn $f(\theta)$ stetig ist. Der Grenzübergang ist alsdann gleichmäßig.

Ist die Funktion $f(\theta)$ beschränkt, so ist in allen Punkten im Innern von K

$$(39.) \qquad \left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right| \\ \left|\dfrac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \varphi}\right|\end{array}\right\} < \frac{C_1}{R-r},$$

worin C_1 ebenso wie die weiter unten auftretenden Größen $C_2, C_3, \ldots$ gewisse positive Werte bezeichnet.

Hieraus folgt für alle z in K

$$\left|\frac{dw(z)}{dz}\right| < \frac{C_2}{R-r}, \tag{40.}$$

$$|v(r,\varphi)| < C_3 |\ln(R-r)| + C_4. \tag{41.}$$

Wie wir vorhin gesehen haben, hat der Grenzwert

$$\lim_{\substack{r=R \\ \varphi=\theta_0}} v(r,\theta_0),$$

außer höchstens in einer gewissen Nullmenge der Punkte (R,θ_0), einen bestimmten endlichen Wert. Aus der Beziehung (41.) folgt, daß in jenen ausgeschlossenen Punkten die Funktion $v(r,\theta_0)$ für $r=R$ höchstens logarithmisch unendlich wird.

§ 4.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der partiellen Ableitung $\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}$ über und beweisen den folgenden Satz:

Es sei $f(\theta)$ eine stetige Funktion, die eine nicht notwendig beschränkte, nebst ihrem Quadrate integrierbare Ableitung $f'(\theta)$ besitzt. Alsdann ist, höchstens mit Ausnahme einer gewissen Nullmenge von Punkten (R,θ_0),

$$\lim_{\substack{r=R \\ \varphi=\theta_0}} \frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r} = \psi(\theta_0) \tag{42.}$$

vorhanden. Die Funktion $[\psi(\theta)]^2$ ist integrierbar.

Dieser Satz gilt natürlich auch dann, wenn $f'(\theta)$ in einer beliebigen Nullmenge nicht existiert oder bestimmt unendlich große Werte annimmt, insbesondere z. B. dann, wenn die Funktion $f(\theta)$ der Bedingung

$$|f(\theta+h)-f(\theta)| < C_5 h$$

genügt.

Es sei

$$f'(\theta) \sim c_1 \cos\theta + c_2 \cos 2\theta + \cdots + d_1 \sin\theta + d_2 \sin 2\theta + \cdots$$

und

$$f(\theta) \sim \frac{b_0}{2} + b_1 \cos\theta + b_2 \cos 2\theta + \cdots + a_1 \sin\theta + a_2 \sin 2\theta + \cdots.$$

Aus den Gleichungen

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\cos n\tau\, d\tau = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\tau)\sin n\tau\, d\tau = -\frac{d_n}{n},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\sin n\tau\, d\tau = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\tau)\cos n\tau\, d\tau = \frac{c_n}{n}$$

folgt, daß die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2)$$

konvergiert.

Es sei jetzt

$$h(\theta) \sim b_1\cos\theta + 2b_2\cos 2\theta + 3b_3\cos 3\theta + \cdots + a_1\sin\theta + 2a_2\sin 2\theta + 3a_3\sin 3\theta + \cdots$$

und

$$W(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2} h(\theta)\, d\theta.$$

Außer höchstens in einer gewissen Nullmenge der Punkte (R, θ_0), ist

$$\lim_{\substack{r=R\\ \varphi=\theta_0}} W(r,\varphi) = h(\theta_0).$$

Für alle $r < R$ ist ferner

$$W(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\Big[\cos n\varphi\int_{-\pi}^{\pi} h(\tau)\cos n\tau\, d\tau + \sin n\varphi\int_{-\pi}^{\pi} h(\tau)\sin n\tau\, d\tau\Big]$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}[nb_n\cos n\varphi + na_n\sin n\varphi] = r\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}.$$

Damit ist unser Satz bereits vollständig bewiesen.

§ 5.

Es möge jetzt vorübergehend $f(\theta)$ eine beliebige stetige Funktion bezeichnen. Damit für einen bestimmten Wert der Amplitude θ

$$\lim_{r=R} v(r,\theta)$$

existiert, ist, wie Herr *Fatou* gezeigt hatte, notwendig und hinreichend, daß der Grenzwert

$$(43.)\qquad \lim_{\varepsilon=0}\int_{\varepsilon}^{\pi}[f(\theta+t) - f(\theta-t)]\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\,dt, \quad \varepsilon > 0$$

existiert*). Der Ausdruck (43.) stellt alsdann den *Cauchy*schen Hauptwert des Integrals

*) Vgl. a. a. O., S. 360.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta + t)\ \operatorname{cotg}\frac{t}{2}\,dt$$

dar.

Mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung dieses Satzes wollen wir die Entwicklungen von Herrn *Fatou* mit einer kleinen Änderung reproduzieren. Wir erteilen dem Satze die folgende schärfere Fassung:

Es sei $f(\theta)$ eine nicht notwendig beschränkte, integrierbare Funktion und es möge dem Werte θ ein Stetigkeitspunkt von $f(\theta)$ entsprechen. Damit

$$\lim_{r=R} v(r, \theta)$$

existiert, ist notwendig und hinreichend, daß der Ausdruck

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{\pi} [f(\theta + t) - f(\theta - t)]\ \operatorname{cotg}\frac{t}{2}\,dt, \quad \varepsilon > 0$$

existiert.

Wir setzen

$$f(\theta + t) - f(\theta - t) = \psi(t), \quad \arcsin\frac{R-r}{R} = \varepsilon,$$
$$R^2 + r^2 - 2Rr\cos t = \Delta$$

und betrachten das Integral

$$(44.) \qquad v(r, \theta) = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{Rr\sin t}{\Delta}\,\psi(t)\,dt = L_1 + L_2,$$

$$L_1 = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\varepsilon} \frac{Rr\sin t}{\Delta}\,\psi(t)\,dt, \quad L_2 = -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{Rr\sin t}{\Delta}\,\psi(t)\,dt.$$

Es sei m_0 die obere Grenze von $|\psi(t)|$ in dem Intervalle $(0, \sqrt{\varepsilon})$. Die Zahl m_0 konvergiert mit ε gegen Null, ist somit für alle hinreichend kleinen Werte von ε endlich. Nach (13.) ist

$$(45.) \qquad \Delta > 4(R-r)\sqrt{Rr}\,\sin\frac{t}{2}$$

und

$$|L_1| < \frac{1}{2\pi}\frac{R}{R-r}\,m_0\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon}\,m_0.$$

Dieser Ausdruck verschwindet mit $(R-r)$.

Es ist ferner

$$L_2 = -\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\psi(t)\,dt}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{(R-r)^2}{\Delta}\,\frac{\psi(t)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\,dt$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\pi} \frac{(R-r)^2}{\Delta}\,\frac{\psi(t)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\,dt = L_3 + L_4 + L_5.$$

Nach (45.) ist

$$(46.)\qquad |L_4| < \frac{(R-r)\,m_0}{8\pi\sqrt{Rr}} \int_{\varepsilon}^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\cos\frac{1}{2}t}{\sin^2\frac{1}{2}t}\,dt = \frac{m_0}{4\pi}\sqrt{\frac{R}{r}}\left[\frac{\sin\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}t}\right]_{\sqrt{\varepsilon}}^{\varepsilon}.$$

Auch dieser Ausdruck verschwindet mit $(R-r)$.

Es ist schließlich

$$|L_5| < \frac{(R-r)^2}{8\pi(R-r)\sqrt{Rr}} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\pi} \frac{|\psi(t)|\cos\frac{1}{2}t}{\sin^2\frac{1}{2}t}\,dt < \frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{R}{r}}\,\frac{R-r}{R\left(\sin\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\pi} \frac{|\psi(t)|}{\left(\sin\frac{1}{2}t\right)^{\frac{1}{2}}}\,dt$$

$$< \frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{R}{r}}\,\frac{\sin\varepsilon}{\left(\sin\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\pi} \frac{|\psi(t)|}{\left(\sin\frac{1}{2}t\right)^{\frac{1}{2}}}\,dt.$$

Da $f(t)$ im Punkte θ sich stetig verhält, so hat das Integral

$$\int_0^{\pi} \frac{|\psi(t)|}{\left(\sin\frac{1}{2}t\right)^{\frac{1}{2}}}\,dt$$

einen bestimmten endlichen Wert. Der Ausdruck

$$\frac{\sin\varepsilon}{\left(\sin\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

und daher auch $|L_5|$ konvergiert mit ε, d. h. mit $(R-r)$ gegen Null.

Wir erhalten

$$(47.)\qquad \lim_{r=R}\left[v(r,\theta) + \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}[f(\theta+t)-f(\theta-t)]\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\,dt\right] = 0.$$

Hiermit ist, wie man leicht sieht, der Satz von Herrn *Fatou* in der obigen schärferen Fassung bereits bewiesen.

Die Funktion $f(\theta)$ braucht im allgemeinen keine Stetigkeitspunkte zu haben. Hat sie aber welche, so soll mit (M) ihre Gesamtheit bezeichnet werden.

Es sei jetzt $f(\theta)$, wie in § 3, eine im Intervalle $(0, 2\pi)$ erklärte, nebst ihrem Quadrate integrierbare Funktion. Aus dem soeben bewiesenen Satze und aus den Ergebnissen des § 3 folgt nunmehr, daß, abgesehen höchstens von einer gewissen Nullmenge von Punkten θ, das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+t)\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\,dt = \lim_{\varepsilon=0}\int_{\varepsilon}^{\pi}[f(\theta+t)-f(\theta-t)]\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\,dt$$

für alle θ in (M) einen bestimmten endlichen Wert hat. Da die Funktion

$$\operatorname{cotg}\frac{t}{2}-\frac{2}{t}$$

sich im Punkte $t=0$ regulär verhält, so kommt dieselbe Eigenschaft dem Integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+t)\,\frac{dt}{t}=\lim_{\varepsilon=0}\int_{\varepsilon}^{\pi}[f(\theta+t)-f(\theta-t)]\,\frac{dt}{t}$$

zu.

Es mögen jetzt insbesondere die Funktionen $f(\theta)$ und $[f(\theta)]^2$ im *Riemann*schen Sinne integrierbar sein*). Die Menge aller Unstetigkeitspunkte von $f(\theta)$ ist vom Maße Null. Beachten wir jetzt, daß die in § 3 mit $g(\theta)$ bezeichnete Funktion nebst ihrem Quadrate integrierbar ist, so können wir den folgenden interessanten Satz aussprechen:

Ist $f(\theta)$ eine nebst ihrem Quadrate im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion, so ist das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+t)\,\frac{dt}{t}=\lim_{\varepsilon=0}\int_{\varepsilon}^{\pi}[f(\theta+t)-f(\theta-t)]\,\frac{dt}{t}=h(\theta),$$

außer höchstens in einer Menge von Punkten θ vom Maße Null, vorhanden. Die Funktion $h(\theta)$ ist nebst ihrem Quadrate integrierbar.

Insbesondere gilt dieser Satz für alle stetige Funktionen $f(\theta)$.

§ 6.

Wir kehren jetzt zu den Bezeichnungen des § 3 zurück und bezeichnen die Entfernung der Punktepaare

$$(r,\varphi),(R,\theta_0);\ (r,\varphi),(R,\theta);\ (R,\theta_0),(R,\theta)$$

entsprechend mit $\varrho_0,\varrho,\varrho^*$. Es sei $f(\theta)$, wie an jener Stelle, eine nebst ihrem Quadrate integrierbare Funktion. Wie man sich leicht überzeugt, ist

$$v(r,\varphi)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2Rr\sin(\theta-\varphi)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,f(\theta)\,d\theta$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\log\frac{1}{\varrho}\Big)d\theta. \tag{48.}$$

Wie in den vorhergehenden Paragraphen gezeigt worden ist, strebt $v(r,\varphi)$ bei der Annäherung an den Rand längs einer beliebigen die Peri-

*) Ist $f(\theta)$ nicht beschränkt, so handelt es sich hierbei natürlich um uneigentliche Integrale.

pherie nicht berührenden Kurve, außer vielleicht in einer gewissen Nullmenge, einem bestimmten Grenzwerte $g(\theta)$ zu. Die Funktion $g(\theta)$ ist nebst ihrem Quadrate integrierbar. Ist insbesondere $[f(\theta)]^2$ im *Riemann*schen Sinne integrierbar, so ist, außer höchstens in einer gewissen Nullmenge

$$(49.)\quad g(\theta_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\operatorname{cotg}\frac{\theta-\theta_0}{2}\,d\theta = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\frac{\partial}{\partial\theta_0}\Big(\log\frac{1}{\varrho^*}\Big)d\theta$$

Es ist

$$(50.)\quad \begin{aligned} f(\theta) \sim\ & \frac{b_0}{2} + b_1\cos\theta + b_2\cos 2\theta + \cdots \\ & + a_1\sin\theta + a_2\sin 2\theta + \cdots, \\ g(\theta) \sim\ & -a_1\cos\theta - a_2\cos 2\theta - \cdots \\ & + b_1\sin\theta + b_2\sin 2\theta + \cdots \end{aligned}$$

und

$$(51.)\quad v(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,g(\theta)\,d\theta.$$

Es sei

$$k(\theta) = \int_0^{\theta} g(\tau)\,d\tau, \qquad k(2\pi) = k(0).$$

Nach bekannten Sätzen ist, außer vielleicht in einer gewissen Nullmenge,

$$g(\theta) = \frac{dk(\theta)}{d\theta}.$$

Wir führen jetzt das Potential einer einfachen Belegung

$$(52.)\quad L(r,\varphi) = -\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\log\frac{1}{\varrho}\,d\theta$$

und das Integral

$$(53.)\quad M(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,k(\theta)\,d\theta$$

ein. Nach (48.) ist für alle $r < R$

$$(54.)\quad v(r,\varphi) = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}L(r,\varphi).$$

Wie man durch eine teilweise Integration findet, ist ferner

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}M(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,g(\theta)\,d\theta = v(r,\varphi).$$

Hieraus und aus der Formel (54.) ergibt sich

$$L(r,\varphi) = RM(r,\varphi) + \omega(r).$$

Der Ausdruck $\omega(r)$ stellt eine in K reguläre Potentialfunktion dar, ist

daher gleich einer Konstanten. Nach dem in § 1 zitierten Satze von Herrn *Fatou* ist in allen Punkten, in denen die Funktion $\frac{dk(\theta)}{d\theta}$ einen bestimmten Wert hat,

$$\lim_{\substack{r=R\\ \varphi=\theta_0}} \frac{\partial}{\partial \varphi} M(r,\varphi) = \frac{\partial}{\partial \theta_0} [\lim_{r=R} M(r,\theta_0)] = \frac{dk(\theta_0)}{d\theta_0},$$

somit, abgesehen höchstens von einer gewissen Nullmenge,

$$\lim_{\substack{r=R\\ \varphi=\theta_0}} \frac{\partial}{\partial \varphi} L(r,\varphi) = R \frac{\partial}{\partial \theta_0} [\lim_{r=R} L(r,\theta_0)] = R g(\theta_0).$$

Diese Formeln drücken den folgenden Satz aus:

Es sei

$$(55.) \qquad -\frac{R}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \log \frac{1}{\varrho}\, d\theta$$

das Potential einer einfachen Belegung, deren Dichte $-\frac{1}{\pi} f(\theta)$ *eine samt ihrem Quadrate integrierbare Funktion ist. Abgesehen höchstens von einer gewissen Menge von Punkten* (R, θ_0) *vom Maße Null, ist die Tangentialableitung*

$$-\frac{1}{\pi} \lim_{\substack{r=R\\ \varphi=\theta_0}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \log \frac{1}{\varrho}\, d\theta$$

vorhanden und hat den Wert

$$(56.) \qquad g(\theta_0) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{d\theta_0} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \log \frac{1}{\varrho^*}\, d\theta.$$

Diese Tangentialableitung stellt eine samt ihrem Quadrate integrierbare Funktion dar.

Dem in § 4 bewiesenen Satze zufolge ist aber auch die Normalableitung des logarithmischen Potentials (55.), *außer etwa in einer gewissen Nullmenge, vorhanden und nebst ihrem Quadrate integrierbar.*

Der vorstehende Satz gibt eine in gewissem Sinne definitive Antwort auf die Frage der Existenz der partiellen Ableitungen des Potentials einer einfachen Belegung bei einem Kreisgebiet.

Ist insbesondere die Funktion $[f(\theta)]^2$ im *Riemann*schen Sinne integrierbar, so ist

$$g(\theta_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \operatorname{cotg} \frac{\theta-\theta_0}{2}\, d\theta = -\frac{1}{\pi} \int^{\pi} f(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta_0} \left(\log \frac{1}{\varrho^*}\right) d\theta.$$

Hieraus und aus der Formel (56.) finden wir somit für alle θ_0, höchstens mit Ausnahme einer gewissen Nullmenge,

$$(57.)\quad \frac{d}{d\theta_0}\Big[-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\log\frac{1}{\varrho^*}\,d\theta\Big] = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta_0}\Big(\log\frac{1}{\varrho^*}\Big)d\theta$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\operatorname{cotg}\frac{\theta-\theta_0}{2}\,d\theta.$$

Diese Formel gibt den Wert der Tangentialableitung des logarithmischen Potentials einer einfachen Belegung bei einem Kreisgebiet an. Sie gilt, wir wiederholen es, wenn die Dichtigkeit samt ihrem Quadrate im *Riemann*schen Sinne integrierbar ist.

Es sei $F(\theta)$ eine stetige, der Bedingung $F(\theta+2\pi)=F(\theta)$ genügende Funktion, $u_0(r,\varphi)$ diejenige im Innern von K reguläre Potentialfunktion, die auf dem Rande die Werte $F(\theta)$ annimmt. *Damit $u_0(r,\varphi)$ als Potential einer einfachen Belegung dargestellt werden kann, ist nach dem vorstehenden notwendig, daß $F(\theta)$ eine nebst ihrem Quadrate integrierbare Ableitung besitzt.*

Diese Bedingung ist zugleich hinreichend, wenn es keine von Null verschiedene Belegung gibt, deren Potential identisch verschwindet.

Dies trifft offenbar zu, wenn $R \neq 1$. Ist dagegen $R=1$, so ist das Potential

$$-\int_{-\pi}^{\pi}\log\frac{1}{\varrho}\,d\theta$$

identisch gleich Null. Die Funktion $u(r,\varphi)\equiv 1$ läßt sich nicht als das Potential einer einfachen Belegung darstellen.

Es sei somit $R \neq 1$ und

$$(58.)\quad g(\theta)=\frac{1}{R}\frac{dF(\theta)}{d\theta} \sim -a_1\cos\theta - a_2\cos 2\theta - \cdots + b_1\sin\theta + b_2\sin 2\theta + \cdots.$$

Man setze

$$(59.)\quad \bar{f}(\theta) \sim b_1\cos\theta + b_2\cos 2\theta + \cdots + a_1\sin\theta + a_2\sin 2\theta + \cdots$$

und betrachte das logarithmische Potential

$$(60.)\quad -\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}(\theta)\log\frac{1}{\varrho}\,d\theta.$$

Nach (56.) ist

$$(61.)\qquad \frac{dF(\theta_0)}{d\theta_0} = Rg(\theta_0) = -\frac{R}{\pi}\frac{d}{d\theta_0}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}(\theta)\log\frac{1}{\varrho^*}\,d\theta,$$

somit

$$(62.)\qquad F(\theta_0) = -\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}(\theta)\log\frac{1}{\varrho^*}\,d\theta + C_6{}^*),$$

worin C_6 eine gewisse Konstante bezeichnet.

Hierfür kann man auch setzen

$$(63.)\qquad F(\theta_0) = -\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\bar{f}(\theta) + \frac{C_6}{2R\log R}\right]\log\frac{1}{\varrho^*}\,d\theta,$$

somit

$$(64.)\qquad u_0(r,\varphi) = -\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\bar{f}(\theta) + \frac{C_6}{2R\log R}\right]\log\frac{1}{\varrho}\,d\theta.$$

Ist $R=1$, so muß, damit $u_0(r,\varphi)$ als Potential einer einfachen Belegung dargestellt werden kann, $C_6=0$ sein. Beachten wir, daß das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log\frac{1}{\varrho^*}\,d\theta_0$$

von θ unabhängig ist, so finden wir aus (62.) für $R=1$ die weitere Beziehung

$$(65.)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}F(\theta_0)\,d\theta_0 = -\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\frac{1}{\varrho^*}\,d\theta_0\int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}(\theta)\,d\theta = 0.$$

Diese Bedingung und die Existenz der nebst ihrem Quadrate integrierbaren Ableitung $\frac{dF(\theta)}{d\theta}$ *sichert nach* (62.) *die Existenz einfacher Belegungen von gewünschten Eigenschaften auch dann, wenn* $R=1$. *Die Auflösung ist diesmal natürlich nicht eindeutig.*

Man überzeugt sich, wie in § 4, daß die unendliche Reihe

$$(66.)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2)$$

konvergiert. Die Konvergenz der Reihe (66.) stellt für $R\neq 1$ gleichfalls eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß die Funktion

---

*) Die durch die Gleichung (59.) erklärte Funktion $\bar{f}(\theta)$ unterscheidet sich um $\frac{b_0}{2}$ von der Funktion $f(\theta)$ in (50.). Wie leicht ersichtlich, ist indessen

$$\frac{d}{d\theta_0}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{b_0}{2}\log\frac{1}{\varrho^*}\,d\theta = 0.$$

$u_0(r, \varphi)$ als Potential einer einfachen Belegung dargestellt werden kann.

Diese Bedingung ist auf einem anderen Wege von Herrn *Picard* abgeleitet worden*).

§ 7.

Wir legen den weiteren Betrachtungen das Gebiet

$$0 \leqq x \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq y \leqq 2\pi \tag{67.}$$

und das vollständige, normierte Orthogonalsystem

$$\begin{gathered} \frac{1}{4\pi^2}, \quad \frac{1}{2\pi^2}\cos px, \quad \frac{1}{2\pi^2}\sin px, \quad \frac{1}{2\pi^2}\cos qy, \quad \frac{1}{2\pi^2}\sin qy, \\ \frac{1}{\pi}\cos px\cos qy, \quad \frac{1}{\pi}\cos px\sin qy, \quad \frac{1}{\pi}\sin px\cos qy, \quad \frac{1}{\pi}\sin px\sin qy \\ (p, q = 1, 2, \ldots) \end{gathered} \tag{68.}$$

zugrunde. Der Einfachheit halber bezeichnen wir vorübergehend die irgend wie einfach geordnete Folge (68.) mit

$$\varphi_1(x, y), \quad \varphi_2(x, y), \ldots \varphi_n(x, y), \ldots . \tag{69.}$$

Es sei $f(x, y)$ eine nebst ihrem Quadrate in (67.) integrierbare Funktion, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ ihr zu (69.) gehöriges System der *Fourier*schen Koeffizienten.

Es ist

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(x, y)]^2 dx\, dy = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2. \tag{70.}$$

Ist umgekehrt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ eine beliebige Folge reeller Zahlen, die so beschaffen ist, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ konvergiert, so gibt es eine nebst ihrem Quadrate integrierbare Funktion $f(x, y)$, deren zu (69.) gehörige *Fourier*sche Koeffizienten die Werte α_n $(n = 1, 2, \ldots)$ haben. Die Funktion $f(x, y)$ ist bis auf Nullmengen eindeutig bestimmt**).

---

*) Vgl. *E. Picard*, Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de Physique mathématique, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, T. XXIX (1910), S. 79—97. Herr *Picard* nimmt die Funktion $F(\theta)$ abteilungsweise stetig an. Diese Annahme ist nicht zulässig; $F(\theta)$ ist augenscheinlich stetig und von beschränkter Schwankung.

**) Diese Aussage stellt den *Fischer-Riesz*schen Satz für das spezielle Orthogonalsystem (68.) im zweidimensionalen Gebiete dar. Der an einen Satz von Herrn *Weyl* sich anlehnende Beweis für die Funktionen einer Variablen (Vgl. z. B. *M. Plancherel*, Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, T. XXX (1910), S. 289—335) läßt sich auf den vorliegenden Fall ohne Änderung übertragen.

Es sei jetzt $P(x,y)$ eine in dem Gebiete T

(71.) $$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \pi$$

erklärte, samt ihrem Quadrate integrierbare Funktion. Wir stellen uns die Aufgabe, die auf dem Rande C von T verschwindende Lösung der Differentialgleichung

(72.) $$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = P(x,y)$$

zu bestimmen.

Hierzu denken wir uns zunächst die Funktion $P(x,y)$ in der ganzen Ebene den Beziehungen

(73.) $$\begin{aligned} P(-x,y) &= -P(x,y), & P(x+2\pi,y) &= P(x,y), \\ P(x,-y) &= -P(x,y), & P(x,y+2\pi) &= P(x,y) \end{aligned}$$

gemäß fortgesetzt. Alsdann ist, wie man sich leicht überzeugt,

(74.) $$P(x,y) \sim \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{p,q} \cdot \frac{1}{\pi} \sin px \sin qy,$$

(75.) $$a_{p,q} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\alpha,\beta) \sin p\alpha \sin q\beta \, d\alpha \, d\beta.$$

Die unendliche Reihe $\sum_{p,q=1}^{\infty} a_{p,q}^2$ konvergiert.

Betrachten wir die unendliche Reihe

$$U(x,y) = -\sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} a_{p,q} \frac{\sin px \sin qy}{p^2+q^2}.$$

Sie konvergiert für alle (x,y) unbedingt und in gleichem Grade. Denn es ist

$$\left(\sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{|a_{p,q}|}{p^2+q^2}\right)^2 < \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{p,q}^2 \sum_{p,q=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)^2$$

$$< \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{p,q}^2 \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2q^2} = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{p,q}^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{2q^2}.$$

Es sei (x,y) ein Punkt im Innern von T und $G(x,y;\xi,\eta)$ die zu T gehörige klassische *Green*sche Funktion

$$G(x,y;\xi,\eta) = -\frac{1}{2} \log |(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2| + g(x,y;\xi,\eta).$$

Der Ausdruck

(77.) $$V(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_T G(x,y;\xi,\eta) P(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta$$

stellt, wie man sich leicht überzeugt, eine in T stetige, auf C verschwindende Funktion dar. Wir setzen sie den Bedingungen

$$(78.)\qquad \begin{aligned} V(-x,y) &= -V(x,y), \quad V(x+2\pi,y) = V(x,y),\\ V(x,-y) &= -V(x,y), \quad V(x,y+2\pi) = V(x,y) \end{aligned}$$

gemäß in der ganzen Ebene fort. Die *Fourier*schen Koeffizienten von $V(x,y)$ in bezug auf das Orthogonalsystem (68.) ergeben sich zu

$$(79.)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} V(\alpha,\beta)\sin p\alpha \sin q\beta\, d\alpha\, d\beta\\ &= -\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} d\alpha\, d\beta \sin p\alpha \sin q\beta \iint_T G(\alpha,\beta;\xi,\eta)\,P(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta\\ &= -\frac{2}{\pi^2}\iint_T P(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta \iint_T G(\alpha,\beta;\xi,\eta)\sin p\alpha \sin q\beta\, d\alpha\, d\beta\text{*}). \end{aligned}$$

Beachten wir, daß

$$-\frac{1}{2\pi}\iint_T G(\xi,\eta;\alpha,\beta)\sin p\alpha \sin q\beta\, d\alpha\, d\beta,$$

als die auf C verschwindende Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \sin px \sin qy,$$

den Wert

$$-\frac{\sin px \sin qy}{p^2+q^2}$$

hat, so finden wir für (79.) den Ausdruck

$$-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} P(\xi,\eta)\,\frac{\sin p\xi \sin q\eta}{p^2+q^2}\,d\xi\, d\eta = -\frac{a_{p,q}}{p^2+q^2}.$$

Da die beiden Funktionen $U(x,y)$ und $V(x,y)$ im Gebiete (69.) stetig sind, so ist hiernach

$$(80.)\qquad U(x,y) \equiv V(x,y).$$

Betrachten wir nunmehr die beiden nebst ihren Quadraten integrierbaren Funktionen

$$(81.)\qquad \begin{aligned} u_1(x,y) &\sim \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{p^2 a_{p,q}}{p^2+q^2}\cdot\frac{1}{\pi}\sin px \sin qy,\\ u_2(x,y) &\sim \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{q^2 a_{p,q}}{p^2+q^2}\cdot\frac{1}{\pi}\sin px \sin qy. \end{aligned}$$

Es ist zunächst

$$u_1(x,y) + u_2(x,y) \sim \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{p,q}\cdot\frac{1}{\pi}\sin px \sin qy,$$

somit, außer etwa in einer Punktmenge vom Flächenmaße Null,

$$(82.)\qquad u_1(x,y) + u_2(x,y) = P(x,y).$$

---

*) Die Vertauschung der Integrationsfolge ist erlaubt.

Da das Doppelintegral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[u_1(x,y)]^2\,dx\,dy$$

existiert, so ist nach einem Satze von Herrn *Fubini**) auch das Integral

$$\int_0^{2\pi}[u_1(x,y)]^2\,dx,$$

außer höchstens in einer Nullmenge der Werte y, vorhanden. Es ist ferner

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[u_1(x,y)]^2\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}dy\int_0^{2\pi}[u_1(x,y)]^2\,dx.$$

Abgesehen von einer gewissen Nullmenge der Werte y haben daher alle Ausdrücke

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}u_1(\alpha,y)\sin p\alpha\,d\alpha=A_p(y)$$

eine bestimmte Bedeutung. Die Funktionen $A_p(y)$ sind nebst ihren Quadraten integrierbar.

Es ist somit

$$A_p(y)\backsim\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin qy\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}u_1(\alpha,\beta)\sin p\alpha\sin q\beta\,d\alpha\,d\beta,$$

oder

$$A_p(y)\backsim\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin qy\,\frac{p^2a_{p,q}}{p^2+q^2}. \tag{83.}$$

Die unendliche Reihe in (83.) konvergiert unbedingt und in gleichem Grade. Abgesehen höchstens von einer gewissen Nullmenge der Werte y kann daher für alle p einfacher

$$A_p(y)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin qy\,\frac{p^2a_{p,q}}{p^2+q^2} \tag{84.}$$

gesetzt werden.

Für alle y in einer gewissen im Intervalle $0\leqq y\leqq 2\pi$ gelegenen Punktmenge (N) vom Maße 2π ist offenbar

$$u_1(x,y)\backsim\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin px\,A_p(y). \tag{85.}$$

Nach einem von Herrn *Fatou* verschärften Satze von Herrn *Lebesgue* folgt hieraus für alle y in (N) und für alle x

$$\int_0^{x}u_1(x,y)\,dx=-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\cos px}{p}\,A_p(y)+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{p}\,A_p(y)^{**}). \tag{86.}$$

---

*) Vgl. *Fubini*, Sugli integrali multipli, Rendiconti dell r. Acc. dei Lincei, 1907, S. 608—614.

**) Vgl. a. a. O. (S. 12, Anm. **)), S. 383.

Die erste unendliche Reihe rechterhand konvergiert bei festgehaltenem y für alle x gleichmäßig. Aus (86.) ergibt sich weiter

$$(87.)\quad \int_0^x dx \int_0^x u_1(x,y)\,dx = -\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin px}{p^2} A_p(y) + x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{p} A_p(y).$$

Aus (84.) und (87.) folgt nach einer Umordnung der Glieder für alle y in (N) und alle x

$$(88.)\quad \int_0^x dx \int_0^x u_1(x,y)\,dx = U(x,y) + x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{p} A_p(y)$$

und daher auch

$$(89.)\quad \int_0^x u_1(x,y)\,dx - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{p} A_p(y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}.$$

Es sei y irgend ein Wert in (N). Aus (89.) folgt nach einem bekannten Satze von Herrn *Lebesgue*, daß für alle x, außer etwa in einer gewissen Nullmenge,

$$(90.)\quad u_1(x,y) = \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2}$$

ist. Die Funktion $\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2}$ ist, nach der Bezeichnungsweise von Herrn *Baire*, eine Funktion der zweiten Klasse. Sie ist daher, als Funktion zweier Variabeln aufgefaßt, in der Menge derjenigen Punkte, in der sie existiert, meßbar. Aus unseren Ausführungen folgt nunmehr nach bekannten Sätzen, daß die Menge der Punkte, in denen $\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2}$ vielleicht nicht existiert oder nicht endlich ist, jedenfalls vom Flächenmaße Null ist.

In ähnlicher Weise überzeugt man sich, daß, abgesehen höchstens von einer gewissen Menge von Punkten vom Flächenmaße Null,

$$(91.)\quad u_2(x,y) = \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2}.$$

Der Beziehung (80.) *zufolge hat somit die Funktion*

$$-\frac{1}{2\pi} \iint_T G(x,y;\xi,\eta)\,P(\xi,y)\,d\xi\,d\eta$$

und daher auch das logarithmische Potential

$$(92.)\quad W(x,y) = \frac{1}{4\pi} \iint_T P(\xi,\eta) \log\left|(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right| d\xi\,d\eta,$$

außer höchstens in einer gewissen Menge von Punkten vom Flächenmaße Null, partielle Ableitungen zweiter Ordnung

$$(93.)\quad \frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2}.$$

Die Funktionen* (93.) *sind samt ihren Quadraten integrierbar und erfüllen der Formel* (82.) *zufolge die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2} = P(x,y). \tag{94.}$$

Es möge jetzt $P(x,y)$ beschränkt, im *Riemann*schen Sinne integrierbar und in einer Umgebung des Punktes (x,y) auf jedem von ihm ausgehenden Halbstrahle stetig sein. Nach einem Satze von Herrn *Petrini* sind im Punkte (x,y) die partiellen Ableitungen (93.) dann und nur dann vorhanden, wenn der Ausdruck

$$\lim_{\tau=0} \iint_{T-\tau} P(\xi,\eta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log |(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2| \, d\xi \, d\eta \tag{95.}$$

existiert*). Hierin bezeichnet τ einen kleinen Kreis um (x,y). Für alle Funktionen $P(x,y)$, die in dem ganzen Gebiete T stetig sind, ergibt sich die interessante Folgerung:

Der Ausdruck

$$k(x,y) = \lim_{\tau=0} \iint_{T-\tau} P(\xi,\eta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log |(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2| \, d\xi \, d\eta$$

hat, außer etwa in einer gewissen Nullmenge der Punkte (x,y), eine bestimmte Bedeutung.

Wir wenden uns nunmehr der Betrachtung der partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y \partial x}$ zu und beweisen den folgenden Satz:

Abgesehen höchstens von einer gewissen in (67.) *gelegenen Nullmenge (Q) sind*

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y \partial x} \tag{96.}$$

vorhanden, nebst ihren Quadraten integrierbar und einander gleich.

Hierzu ist noch folgendes zu bemerken: Es ist

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y} = \lim_{h=0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial U(x+h,y)}{\partial y} - \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y \partial x} = \lim_{h=0} \frac{1}{k} \left(\frac{\partial U(x,y+k)}{\partial x} - \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \right).$$

---

*) Vgl. die Fußnote **) S. 14.

Bei dem Grenzübergange durchlaufen die Punkte $(x+h, y)$ und $(x, y+k)$ lediglich die Punkte der zu (Q) im Gebiete (67.) komplementären Menge.

Der Beweis ist sehr einfach. Betrachten wir die quadratisch integrierbare Funktion

$$(97.) \qquad u_3(x,y) \sim \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{pq a_{p,q}}{p^2+q^2} \cdot \frac{1}{\pi} \cos px \cos qy.$$

Das Doppelintegral

$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^y u_3(x,y)\, dx\, dy$$

ist eine in dem Gebiete (67.) stetige Funktion von x und y. Bestimmen wie ihre *Fourier*schen Koeffizienten. Hierzu haben wir Integrale von der Form

$$A_{p,q} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos p\alpha \cos q\beta\, d\alpha\, d\beta \int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} u_3(x,y)\, dx\, dy \quad \text{usw.}$$

auszuwerten. Es ist nun für $p \geqq 1$, wie man durch eine teilweise Integration leicht findet,

$$(98.) \int_0^{2\pi} \cos p\alpha\, d\alpha \int_0^{\alpha} \int_0^{y} u_3(x,y)\, dx\, dy = -\int_0^{2\pi} \frac{\sin p\alpha}{p} \int_0^{y} u_3(\alpha, y)\, dy.$$

Da $u_3(\alpha, y) \dfrac{\sin p\alpha}{p}$, als Funktion zweier Variabeln aufgefaßt, integrierbar ist, so kann man für (98.) auch setzen

$$-\int_0^{2\pi} \int_0^{y} u_3(\alpha, y) \frac{\sin p\alpha}{p}\, d\alpha\, dy.$$

Nunmehr erhalten wir, sofern $q \geqq 1$,

$$A_{p,q} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d \sin q\beta}{q} \int_0^{\beta} dy \left[\int_0^{2\pi} u_3(\alpha, y) \frac{\sin p\alpha}{p}\, d\alpha \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u_3(\alpha, \beta) \frac{\sin p\alpha}{p} \frac{\sin q\beta}{q}\, d\alpha\, d\beta = 0.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin p\alpha \sin q\beta\, d\alpha\, d\beta \int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} u_3(x,y)\, dx\, dy = \frac{a_{p,q}}{p^2+q^2},$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin p\alpha \cos q\beta\, d\alpha\, d\beta \int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} u_3(x,y)\, dx\, dy = 0$$

und

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos p\alpha \sin q\beta\, d\alpha\, d\beta \int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} u_3(x,y)\, dx\, dy = 0.$$

Es ist weiter

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} u_3(x,y)\,dx\,dy = 2\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{\beta} u_3(x,y)\,dx\,dy - \int_0^{2\pi} \int_0^{\beta} \alpha u_3(\alpha,y)\,d\alpha\,dy .$$

Nun ist, höchstens mit Ausnahme einer gewissen Nullmenge von Punkten (α, y),

$$u_3(\alpha,y) = u_3(2\pi - \alpha, y),$$

somit

$$\int_0^{2\pi} \alpha u_3(\alpha,y)\,d\alpha = \int_0^{\pi} u_3(\alpha,y)[\alpha + 2\pi - \alpha]\,d\alpha = \pi \int_0^{2\pi} u_3(\alpha,y)\,d\alpha,$$

$$-\int_0^{2\pi} \int_0^{\beta} \alpha u_3(\alpha,y)\,d\alpha\,dy = -\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{\beta} u_3(\alpha,y)\,d\alpha\,dy.$$

Wir finden daher

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha\,d\beta \int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} u_3(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{2\pi} \int_0^{\beta} u_3(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\beta \int_0^{2\pi} \int_0^{\beta} u_3(x,y)\,dx\,dy\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \beta\,d\beta \int_0^{2\pi} u_3(x,\beta)\,dx$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta u_3(x,\beta)\,dx\,d\beta = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u_3(x,\beta)\,dx\,d\beta = 0.$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos p\alpha\,d\alpha\,d\beta \int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} u_3(x,y)\,dx\,dy = 0 \quad \text{usw.}$$

Wir finden schließlich

$$(99.)\quad \int_0^{x} \int_0^{y} u_3(x,y)\,dx\,dy \sim \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{p,q} \cdot \frac{1}{\pi} \frac{\sin px \sin qy}{p^2 + q^2} = U(x,y).$$

Da sowohl $U(x,y)$ als auch das Doppelintegral in (99.) stetige Funktionen von (x, y) sind, so ist für alle (x,y) in (67.)

$$(100.)\qquad \int_0^{x} \int_0^{y} u_3(x,y)\,dx\,dy = U(x,y).$$

Nach einem Satze von Herrn *Lebesgue* hat das Doppelintegral $F(x,y) = \int_0^{x} \int_0^{y} u_3(x,y)\,dx\,dy$, außer in den Punkten einer gewissen Nullmenge (Q), partielle Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}$. Bei der Bildung der beiden zuletzt genannten Ausdrücke hat man nur die Punkte der zu (Q) in (67.) gehörigen Komplementärmenge zu berücksichtigen.

Alsdann ist

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = u_3(x,y)^*).$$

Da nun nach (100.)

$$F(x,y) = U(x,y)$$

ist, so ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Wir haben unseren Betrachtungen das besondere Integrationsgebiet (71.) zugrunde gelegt. Der allgemeine Fall eines beliebigen Integrationsgebietes läßt sich auf den vorerwähnten leicht zurückführen.

Es sei, wie in der Einleitung, T_0 ein beliebiges, etwa von einer regulär analytischen Kurve begrenztes endliches Gebiet, $P(x,y)$ eine in T_0 erklärte, nebst ihrem Quadrate integrierbare Funktion. Betrachten wir das logarithmische Potential

$$(101.) \qquad \frac{1}{4\pi}\iint_{T_0} P(\xi,\eta)\log\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}\,d\xi\,d\eta.$$

Wir nehmen an, daß T_0 ganz im Innern von P enthalten ist. Andernfalls führen wir zuerst eine passende lineare Substitution aus. Setzt man dann $P(x,y)$ in $T-T_0$ gleich Null, so geht (101.) über in

$$(102.)\ U(x,y) = \frac{1}{4\pi}\iint_{T} P(\xi,\eta)\log\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}\,d\xi\,d\eta.$$

Durch die beiden Sätze dieses Paragraphen ist die alte Frage der Existenz der partiellen Ableitungen des logarithmischen Potentials in gewissem Sinne definitiv erledigt.

---

*) Vgl. *Lebesgue*, Sur l'intégration des fonctions discontinues, Annales de l'École normale supérieure, Bd. XXVII (3), 1910, S. 361—450.

Axiomatische Begründung von *Hensels* *p*-adischen Zahlen.

Von Herrn *Adolf Fraenkel* in München.

§ 1. Einleitung.

Seit einer Reihe von Jahren hat Herr *K. Hensel* in zahlreichen Abhandlungen*) sowie neuerdings in einem die Theorie in klarer und einfacher Weise darstellenden Buche**) neue, den in der Funktionentheorie verfolgten Wegen analoge Untersuchungsmethoden bei der Behandlung der Teilbarkeitsfragen in der niederen und höheren Zahlentheorie eingeführt und fortgebildet. Die Vorteile und Ergebnisse, die die neue Betrachtungsweise bei der Untersuchung der arithmetischen Eigenschaften der rationalen und algebraischen Zahlen bereits gebracht hat, sind sehr beträchtlich und verschiedenartig***); weitere wertvolle Resultate und auch besonders Vereinfachungen verschiedener in der Zahlentheorie heute üblicher Gedankengänge sind von der neuen Methode mit Sicherheit zu erwarten.

*) Vgl. die Zusammenstellung der wichtigeren dieser Arbeiten im Jahresber. d. D. Math.-Ver., Bd. 16 (1907), 299, erste und zweite Fußnote; speziell hervorzuheben sind zwei neuere Abhandlungen, deren besonders interessante Ergebnisse auch in dem in der nächsten Anmerkung zitierten Werke großenteils noch nicht enthalten sind: Jahresber. d. D. Math.-Ver., Bd. 16 (1907), 299—319, 388—393, 473—496 und dieses Journ., Bd. 136 (1909), 183—209. Man vergleiche auch die gut orientierenden kürzeren Darstellungen der Herren *Kürschák* (Encyclop. des sciences math., T. I, vol. 2, p. 313—330) und *Dickson* (Bull. of the Amer. Mathem. Soc., vol. 17 [1911], 23—36).

**) Theorie der algebr. Zahlen, Bd. I, Leipz. 1908; im folgenden zitiert als „Alg. Z.“.

***) Vgl. auch die Vorrede der Alg. Z., S. VI.

Die den *Hensel*schen Methoden zugrunde liegende Theorie der sogenannten „rationalen und algebraischen p-adischen Zahlen" bietet aber, wie mir scheint, auch abgesehen von diesen „Anwendungen" und selbst bei vollkommener Außerachtlassung jeder Beziehung zu den gewöhnlichen rationalen und algebraischen Zahlen noch sehr erhebliches und mannigfaches Interesse. In dieser Beziehung ist bis jetzt nur zu erwähnen, daß gewisse Eigenschaften des Körpers der p-adischen Zahlen Herrn *Steinitz* zu interessanten allgemeinen Untersuchungen über Körpertypen*) angeregt haben; eine andere, die abstrakte Grundlegung des Bereichs der p-adischen Zahlen selbst betreffende Untersuchung anzustellen, ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes.

Schon bevor sich im Jahre 1899 Herr *Hilbert* in einem neue Wege weisenden Aufsatze**) ausdrücklich für die Zweckmäßigkeit der axiomatischen Begründung der Arithmetik ausgesprochen und die hier einzuschlagende Richtung angegeben hatte, waren besonders von seiten deutscher und italienischer***) Mathematiker teils Systeme allgemeiner „meßbarer" oder nicht meßbarer „Größen", teils Bereiche besonderer Arten von Zahlen von bald mehr, bald weniger axiomatischer Fragestellung aus untersucht worden. Von den seit jener Zeit hinzugekommenen wichtigen diesbezüglichen Arbeiten seien neben *Stolz* und *Gmeiner*s Theoretischer Arithmetik†) die Untersuchungen der Herren *Huntington*††) und *Burali-Forti*†††) und die besonders wertvollen älteren des Herrn *Hölder**†) genannt, in denen sämtlich allgemeine Größensysteme betrachtet werden, während eingehende Behandlungen unserer gewöhnlichen reellen und komplexen Zahlen

---

*) Dieses Journ., Bd. 137 (1910), 167—308.

**) Jahresber. d. D. Math.-Ver., Bd. 8 (1900), 180—184; abgedruckt als Anhang VI in der 3. Aufl. von *Hilbert*s Grundlagen der Geometrie, Leipz. 1909.

***) Vorzüglich von Herrn *Peano* und seinen Schülern.

†) Leipz. 1900—1902; die I. Abteilung erschien in Neuauflage 1911.

††) Postulates for the theory of absolute continuous magnitude. Transactions of the American Math. Soc., vol. 3 (1902), 264—279.

†††) Sulla teoria generale delle grandezze e dei numeri. Atti della R. Acad. delle Sc. di Torino, vol. 39 (1904), 256—272 (in *Peano*s Begriffsschrift); der Aufsatz behandelt im besonderen auch verschiedene Arten von Zahlen.

*†) Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß. Ber. üb. d. Verhandl. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-Phys. Kl., Bd. 53 (1901), 1—37.

sowie besonderer Teilbereiche derselben vorzüglich Herrn *Huntington**) zu danken sind. Es soll nun im folgenden versucht werden, eine derartige *axiomatische Begründung der rationalen***) *p-adischen Zahlen* in der Weise zu geben, daß zunächst ihr Ordnungstypus durch unabhängige Postulate eindeutig festgelegt wird und dann die den Körper konstituierenden Eigenschaften nebst einigen anderen, die besondere Eigenart des betrachteten Systems charakterisierenden Forderungen eingeführt werden***).

Bei der Durchführung dieser Aufgabe, in deren Natur es übrigens wie bei allen derartigen Untersuchungen gelegen ist, daß subjektive Geschmacksfragen besonders in der Auswahl der Postulate nicht unerheblich mitsprechen, sind verschiedene Punkte von allgemeinerem Interesse zu berühren, von denen hier auf einige hingewiesen sei. In § 2 wird sich die

---

*) Von dessen zahlreichen diesbezüglichen Arbeiten seien hier nur die beiden im 6. Bd. der Transact. of the Am. Math. Soc. (p. 17—41, 209—229) erschienenen erwähnt.

**) Zur Vermeidung von Mißverständnissen, die durch die Bezeichnung „rational" herbeigeführt werden könnten, sei noch ausdrücklich betont, daß Herr *Hensel* unter den rationalen p-adischen Zahlen einen Bereich versteht, der nicht abzählbar ist, sondern die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt und daher seinem Umfange nach vielmehr mit dem Bereich aller reellen Zahlen als mit dem der gewöhnlichen rationalen oder algebraischen Zahlen zu vergleichen wäre (Näheres in § 2); daß dieser Bereich noch der Erweiterung zu Bereichen *algebraischer* p-adischer Zahlen fähig ist, hat seinen Grund darin, daß eben doch durchaus nicht alle algebraischen Gleichungen mit rationalen p-adischen Koeffizienten auch rationale p-adische Wurzeln besitzen. — Hervorgehoben sei noch, daß *auch der Bereich aller algebraischen p-adischen Zahlen eines durch eine beliebige algebraische Zahl konstituierten Zahlkörpers im wesentlichen völlig in den folgenden Erörterungen enthalten ist.* Man hat hierbei nur noch zu unterscheiden, ob die Primzahl p ein Teiler der Körperdiskriminante ist oder nicht; in jenem Fall ist eine kleine Abänderung der Postulate $\Pi_{10)}$ des § 3 und $\Phi_{1)}$ des § 4, in diesem Fall eine Abänderung des Postulats $\Phi_{3)}$ des § 4 nötig.

***) Besondere Anregung zur Vornahme dieser Untersuchung verdanke ich den lichtvollen Ausführungen über Gruppen- und Körperbegriff zu Beginn eines demnächst bei Veit & Comp. erscheinenden Lehrbuchs des Herrn *A. Loewy* (Algebra, I. Teil, Grundb. der Arithmetik), wo besonders die interessanten, in Deutschland wenig bekannten Untersuchungen der Herren *E. H. Moore*, *L. E. Dickson* und *E. V. Huntington* über abstrakte Gruppen- und Körperdefinitionen verwendet werden und übrigens auch eine sehr eingehende und klare Einführung des Zahlbegriffs nach der genetischen Methode gegeben wird. (Dazu soll nun auch eine axiomatische Begründungdes Zahlbegriffs unter Verwendung des *Hilbert*schen Vollständigkeitsaxioms treten [Zusatz bei der Korrektur].)

naheliegende, doch meines Wissens noch nicht bemerkte Tatsache zeigen, daß sich eine beliebige „Klasse" der p-adischen Zahlen als Beispiel der vielfach (in mengentheoretischem Interesse wohl zuerst von Herrn *G. Cantor**)) betrachteten *perfekten, nirgends dichten Mengen* ansehen läßt; hierfür erweist es sich als notwendig, eine neue, dann auch in § 4 zur Verwendung kommende Ordnungsrelation (außer der von Herrn *Hensel* verwendeten) einzuführen, sodaß *von zwei verschiedenen p-adischen Zahlen die eine entweder „kleiner" oder „größer" ist als die andere oder drittens zur anderen „äquivalent" ist, in welch letzterem Fall man noch zu unterscheiden hat, welche der beiden äquivalenten Zahlen „höher" und welche „niedriger" ist.* — In § 3 wird sodann der Bereich der p-adischen Zahlen zum *Körper* $K(p)$ gemacht; mit Hilfe dreier weiterer einfacher Postulate gelingt es leicht, die wichtige *Bedeutung der Anzahl* p in $K(p)$ zu beleuchten, $K(p)$ als *nichtarchimedisches System* (in bezug auf die Größenordnung) von interessanten Eigenschaften**) zu erweisen und eine höchst einfachen Gesetzen genügende *Klassenmultiplikation* einzuführen. Dabei sei besonders hervorgehoben, daß gleich den Postulaten des § 2 auch diejenigen des § 3 zugleich *für sehr viel allgemeinere Zahlbereiche,* im besonderen auch *für solche Bereiche p-adischer Zahlen* gelten, *deren Grundzahl p nicht,* wie es in den bisherigen***) Publikationen des Herrn *Hensel* vorausgesetzt wurde, *eine Primzahl, sondern eine beliebig zusammengesetzte Zahl ist,* und die zum Unterschied als *Bereiche g-adischer Zahlen* bezeichnet werden sollen; *diese Zahlbereiche,* über die alles im folgenden Entwickelte leicht aus den beiden ersten Kapiteln der Alg. Z. (man beachte bes. S. 28 f.) folgt, *bilden im allgemeinen keinen Körper,* weil die Multiplikation nicht mehr stets umkehrbar ist, und unterscheiden sich auch bezüglich der Bedeutung der Anzahl g und der Klassenmultiplikation sehr wesentlich von den p-adischen Körpern, was sich alles allein auf Grund

---

*) Math. Ann., Bd. 21 (1883), 590.

**) Der Bereich der p-adischen Zahlen ist auch in den sehr lehrreichen allgemeinen Untersuchungen des Herrn *Hahn* über nichtarchimedische Größensysteme (Sitzungsber. d. Math.-Naturw. Kl. d. Kais. Akad. d. Wiss. Wien, Bd. 116 IIa [1907], 601—655) nicht enthalten, weil die dort vorausgesetzte Tatsache, daß aus $\beta > \beta'$ folge $\alpha + \beta > \alpha + \beta'$, für die p-adischen Zahlen nicht erfüllt ist.

***) In einem demnächst erscheinenden, die Zahlentheorie in neuem, besonders einfachem und interessantem Gewande darstellenden Buche wird Herr *Hensel* auch die g-adischen Zahlen benutzen.

der eingeführten Postulate ergibt. — Schließlich werden in § 4 zwei Eigenschaften der Höhenordnung postuliert und durch eine letzte Forderung die Lehre von den „Näherungswerten“ eingeführt, die dann im Verein mit den früheren Postulaten den Nachweis ermöglicht, daß *der Bereich $K(p)$ wesentlich das einzige System darstellt, das alle gemachten Voraussetzungen erfüllt.*

Daß zum Verständnis des folgenden Aufsatzes *die Kenntnis der Theorie der p-adischen Zahlen nicht erforderlich* ist, sei hier ausdrücklich bemerkt.

In typographischer Hinsicht ist zu sagen, daß die gewöhnlichen Zeichen $< > + - \cdot :$ im folgenden für die Relationen und Verknüpfungen der p-adischen Zahlen benutzt werden; der Leser möge hierbei nicht an Bekanntes denken, sondern diese Zeichen als vorläufig undefinierte Symbole betrachten, die erst durch die an sie gestellten Forderungen einen Sinn erhalten. *Zur Vermeidung von Mißverständnissen werden die Zeichen, wenn sie für Zahlen im gewöhnlichen Sinn*) verstanden werden sollen, in der Form $\overset{*}{<}\ \overset{*}{+}\ \overset{*}{-}\ \overset{*}{:}$ (die drei letzten erst von § 3 an) erscheinen.*

§ 2. Der Ordnungstypus der Menge der p-adischen Zahlen.

Den Gegenstand aller weiteren Betrachtungen bildet ein *System* S, das *Elemente* enthält, welche im folgenden stets mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet werden sollen. Aus äußeren und, wie sich später (S. 56) zeigen wird, auch aus inneren Gründen empfiehlt es sich, das System S sich in Teilsysteme zerlegt zu denken, welche *Klassen* genannt und einzeln mit C oder C_i**) bezeichnet werden sollen; das Wesen der Klassen ist völlig hinreichend gekennzeichnet durch die Bestimmung, daß *jedes in dem System S enthaltene Element* auch als *in einer und nur in einer der Klassen enthalten* gelten soll. Auch möge jede Klasse als in dem System S enthalten bezeichnet werden. Die Einführung der Klassen verfolgt lediglich den Zweck, die Ausdrucksweise einfacher und übersichtlicher zu gestalten; sie wäre ohne innere Schwierigkeiten vollkommen zu vermeiden.

---

*) Von solchen werden nur die ganzen, vorzüglich die ganzen positiven Zahlen zur Verwendung kommen.

**) Der Gebrauch der Indizes wird so lange vermieden werden, bis sich die Menge aller Klassen als abzählbar erwiesen hat.

Es werden in diesem Paragraphen (aus inneren Gründen, wie die am Schluß angegebenen Beispiele lehren) zwei verschiedene (von einander völlig unabhängige) Beziehungs- oder Relationszeichen*) $<$ und $\prec$ eingeführt; $\alpha < \beta$ werde etwa als „α ist kleiner als β“, $\alpha \prec \beta$ als „α ist niedriger als β“ gelesen, die dazugehörigen Substantiva seien „Größe“ und „Höhe“. Ferner soll zur Vermeidung umständlicher Ausdrucksweise in diesem Paragraphen die Möglichkeit, daß etwa Elemente (oder Klassen) aus S zueinander gleich wären, ausgeschlossen werden durch die Bestimmung, daß *jedes Element (jede Klasse) von jedem anderen (jeder anderen) als verschieden zu gelten hat***); das Zeichen $=$ wird demnach nur zur Bezeichnung der Identität dienen, z. B. für den Fall, daß das nämliche Element mit verschiedenen Namen belegt wird.

Auf die *logische* Untersuchung der eingeführten Begriffe (Elemente eines Systems, Relation, Identität usw.) gehe ich nicht näher ein.

Die Postulate für den Ordnungstypus des Systems S sollen in zwei Gruppen eingeteilt werden, deren erste nur die Klassen betrifft, während die Elemente selbst erst in der zweiten auftreten.

I. *Der Ordnungstypus der Menge der Klassen des Systems.*

Die erste Gruppe wird durch die folgenden 7 Postulate $I'_{1)}$ bis $I'_{7)}$ gebildet:

$I'_{1)}$. *Ist C irgend eine in dem System S enthaltene Klasse, so gilt niemals die Relation: $C < C$.*

$I'_{2)}$. *Sind C, C' und C'' irgend drei (auch teilweise***) miteinander identische) Klassen aus S und ist $C < C'$, $C' < C''$, so ist $C < C''$.*

$I'_{3)}$. *Das System S enthält eine besondere Klasse C_∞ von der Eigenschaft, daß für jede von ihr verschiedene Klasse C aus S gilt: $C_\infty < C$*†). S enthält also eine kleinste Klasse C_∞.

*) Schriftsteller englischer Zunge gebrauchen den bezeichnenden Ausdruck „dyadic relation“.

**) Für die p-adischen Zahlen z. B. könnte man dies interpretieren als eine Festsetzung, wonach nur „reduzierte“ Darstellungen (Alg. Z., S. 8 f.) zuzulassen, nichtreduzierte aber auszuschließen wären.

***) In Hinblick auf $I'_{1)}$ läßt sich $I'_{2)}$ dahin abschwächen, daß es in den Fällen, in denen C mit C' oder C' mit C'' identisch ist, keine Anwendung finden soll.

†) Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise im nächstfolgenden wird sogleich vorausgenommen, daß S nur eine einzige derartige Klasse C_∞ enthält, wie sich auf Grund von $I'_{2)}$ und $I'_{1)}$ leicht ergibt.

$I'_{4)}$. *Enthält S überhaupt eine Klasse, so enthält S mindestens noch eine weitere Klasse.*

$I'_{5)}$. *Ist C irgend eine von der etwa nach $I'_{3)}$ in S enthaltenen Klasse C_∞ verschiedene Klasse aus S, so enthält S mindestens eine von C_∞ verschiedene, mit $C/$ zu bezeichnende Klasse von der Art, daß $C/ < C$ ist, während für jede andere Klasse C', für die $C' < C$ gilt, zugleich auch $C' < C/$ gilt.* Außer zu C_∞ gibt es also zu jeder Klasse C aus S eine (von C_∞ verschiedene) nächstkleinere $C/$.

$I'_{6)}$. *Ist C irgend eine von der etwa nach $I'_{3)}$ in S enthaltenen Klasse C_∞ verschiedene Klasse aus S, so enthält S mindestens eine mit $/C$ zu bezeichnende Klasse von der Art, daß $C < /C$ ist, während für jede andere Klasse C', für die $C < C'$ gilt, zugleich auch $/C < C'$ gilt.* Außer zu C_∞ gibt es also zu jeder Klasse C aus S eine nächstgrößere $/C$.

$I'_{7)}$. *Das System S enthält außer den etwa durch die Postulate $I'_{3)}$, $I'_{4)}$, $I'_{5)}$, $I'_{6)}$ geforderten Klassen keine weiteren.*

$I'_{7)}$ läßt sich auch ersetzen durch eine der zwei gleichbedeutenden Formen $I''_{7)}$ und $I'''_{7)}$:

$I''_{7)}$. Enthält ein System außer C_∞ eine weitere Klasse und zu jeder von C_∞ verschiedenen Klasse C die Klassen $C/$ und $/C$, so enthält es alle Klassen von S.

$I'''_{7)}$. Enthält S überhaupt eine Klasse, so enthält S mindestens eine Klasse C von der Art, daß jede von C_∞ verschiedene Klasse aus S in der Reihe $\ldots, ///C, //C, /C, C, C/, C//, C///, \ldots$ enthalten ist.

Man bemerkt zunächst sofort, daß die durch $I'_{5)}$ und $I'_{6)}$ geforderten Klassen $C/$ und $/C$ durch C *eindeutig* bestimmt sind; denn wären z. B. $\bar{C}$ und $\bar{\bar{C}}$ zwei Klassen, deren jede die in $I'_{5)}$ von $C/$ geforderten Eigenschaften besäße, so würden sich die Relationen $\bar{C} < \bar{\bar{C}}$ und $\bar{\bar{C}} < \bar{C}$ ergeben, woraus nach $I'_{2)}$ folgte $\bar{C} < \bar{C}$ in Widerspruch mit $I'_{1)}$.

Nunmehr ergibt sich unmittelbar der wichtige, Postulat $I'_{1)}$ ergänzende

Satz: *Sind C' und C'' irgend zwei verschiedene Klassen aus S, so besteht zwischen ihnen eine der beiden einander ausschließenden Beziehungen $C' < C''$ und $C'' < C'$. Da die unsymmetrische Relation $<$ ferner nach $I'_{2)}$ transitiv ist, so wird die Menge aller Klassen des Systems S durch diese Relation einfach geordnet.*

Daß nämlich *mindestens* eine jener beiden Beziehungen zutrifft, geht zunächst für den Fall, daß C' oder C'' mit der Klasse C_∞ identisch ist, aus der

Definition von C_∞ in $I'_{3)}$ hervor. Sind aber beide Klassen C' und C'' von C_∞ verschieden, so sind nach $I'''_{7)}$ sowohl C' wie C'' in der Reihe $\ldots, //C, /C, C, C/, C//, \ldots$ enthalten, wo C ein Element aus S ist, und jedes Glied dieser Reihe ist eindeutig bestimmt, weil ja allgemein $C/$ und $/C$ durch C stets eindeutig bestimmt sind*); auf Grund von $I'_{5)}$ oder $I_{6)}$ und $I_{2)}$ gelangt man daher nach einer endlichen Zahl von Versuchen stets zu einer der gewünschten Beziehungen $C' < C''$ und $C'' < C'$, die — und zwar auch im Fall $C' = C_\infty$ oder $C'' = C_\infty$ — nach $I_{2)}$ und $I_{1)}$ einander ausschließen.

Wegen des soeben bewiesenen Satzes wird, wenn man die Relation $C < C'$ bei vertauschter Stellung der Elemente C und C' auszudrücken wünscht, die Einführung eines *neuen Relationszeichens* $>$ („größer als“) nötig; $C' > C$ ist also gleichbedeutend mit $C < C'$.

Man erkennt unschwer, daß das System der angegebenen Postulate bei Weglassung aller die besondere Klasse C_∞ betreffenden Forderungen**) eine naturgemäße Verallgemeinerung der bekannten, die Reihe der natürlichen Zahlen festlegenden Postulate Herrn *Peanos* ***) auf die Reihe aller ganzen Zahlen darstellt†); der einzige wesentlichere Unterschied liegt

*) Wäre dies nicht der Fall, so könnte die in $I'''_{7)}$ angegebene Reihe z. B. die Form

$$\ldots, //C, /C, C, \begin{cases} \overline{C}, \overline{C}/, \overline{C}//, \ldots \\ \overline{\overline{C}}, \overline{\overline{C}}/, \overline{\overline{C}}//, \ldots \end{cases}$$

haben, wo sowohl $\overline{C}$ wie $\overline{\overline{C}}$ die an $C/$ gestellten Forderungen erfüllten; in diesem Fall wäre z. B. zwischen $\overline{C}$ und $\overline{\overline{C}}$ keine Relation $<$ definiert.

**) Man hat hierzu $I_{3)}$ zu der Forderung, das System solle mindestens *eine* Klasse enthalten, abzuschwächen, $I_{4)}$ ganz wegzulassen und die folgenden Postulate entsprechend unbedeutend zu vereinfachen.

***) Arithmetices principia nova methodo exposita (Augustae Taurinorum 1889), p. 1; in mehr oder weniger veränderter Fassung wiedergegeben an vielen anderen Stellen.

†) Man beachte, daß im Gegensatz zu den Postulaten für die natürlichen Zahlen in denjenigen für *alle* ganzen Zahlen die Heraushebung einer *besonderen* Zahl (etwa der Null) *nicht* nötig ist; sogar die *Addition der ganzen Zahlen* samt all ihren Eigenschaften läßt sich eindeutig festlegen allein schon durch die folgenden höchst einfachen und den Begriff der Null nicht enthaltenden Forderungen: 1. *Sind a und b ganze Zahlen, so soll auch* $a + b$ *eine eindeutig bestimmte ganze Zahl sein.* 2. *Es soll stets* $a/ + b = a + b/ = (a+b)/$ *sein.* (Diese zweite Doppelforderung läßt sich auch ersetzen durch: 2. Es soll stets $a + b/ = (a + b)/$ sein, 3. *Wenn* es zu jeder ganzen Zahl a eine ganze Zahl 0_a gibt, für die $a + 0_a = a$ wird, so soll für irgend zwei ganze Zahlen a und b stets $0_a = 0_b$ sein. Bei dieser Formulierung tritt die Vereinfachung gegenüber der sonst üblichen Definition der Addition deutlicher hervor.) Auf die hierin zu mathematischem Ausdruck kommenden Eigenschaften der Zahlenreihe ist besonders

nur darin, daß ich von vornherein durchweg den allgemeinen Ordnungsbegriff benutze, wie dies hier dem Zusammenhang mit dem folgenden entspricht*). Die sich so ergebende *axiomatische Begründung der Reihe der gewöhnlichen ganzen Zahlen* dürfte aus Gründen der Natürlichkeit und Einfachheit derjenigen von Herrn *Padoa***) vorzuziehen sein***).

Es bedarf keines besonderen Beweises mehr, daß *durch die Postulate $\Gamma_{1)}$ bis $\Gamma_{7)}$ ein Ordnungstypus vollkommen bestimmt ist, nämlich*, wenn man die Relation $>$ zugrunde legt, *der Typus* $^*\omega + \omega + 1$, d. i. der Typus der Menge aller ganzen rationalen Zahlen mit einem einzelnen am Schluß angefügten Element. Aus dieser Tatsache fließt die Berechtigung, die Klassen durch *Indizes* voneinander zu unterscheiden; da vorläufig mit Ausnahme von C_∞ keine der Klassen vor den anderen ausgezeichnet ist, so soll eine von C_∞ verschiedene, sonst willkürlich herausgegriffene mit C_0 bezeichnet und die Reihe $\ldots, ///C_i, //C_i, /C_i, C_i, C_i/, C_i//, C_i///, \ldots$ fortan als

$$\ldots, C_{i-3}, C_{i-2}, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, C_{i+2}, C_{i+3}, \ldots\,^\dagger)$$

nachdrücklich jüngst von philosophischer Seite hingewiesen worden (*P. Natorp*, Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften [Wiss. u. Hypoth. XII, Leipz. 1910], S. 101 ff., 112, 126, 225 f. u. ö.).

*) Dies bietet übrigens gegenüber der genauen Verallgemeinerung der *Peano*schen Postulate den Vorteil der Symmetrie in der Formulierung der Postulate, ohne daß dafür ein wesentliches Opfer zu bringen ist; denn statt $\Gamma_{2)}$ müßte eine in einem Postulat zu benutzende, offene oder versteckte Definition des Begriffs eines *beliebigen* Nachfolgers (oder Vorgängers) einer Zahl eingeführt werden und auch die Formulierung der Postulate $\Gamma_{5)}$ und $\Gamma_{6)}$ wäre nur scheinbar einfacher, da die eindeutige Bestimmtheit des Vorgängers wie des Nachfolgers gefordert werden müßte.

**) C. R. du 2e congrès internat. des mathématiciens, Paris 1900 (Paris 1902), p. 249—256; ausführlichere Darstellungen findet man dort zitiert. (Auch in dem zitierten *Loewy*schen Lehrbuch wird eine — sich direkt an *Peano* anschließende — Theorie der vollständigen Zahlenreihe gegeben [Zusatz bei der Korrektur].)

***) Natürlich soll mit dieser Behandlung des Gegenstandes keineswegs bestritten werden, daß man zur Begründung der Theorie der ganzen Zahlen und endlichen Mengen von höherem Standpunkte aus die allgemeine Theorie der wohlgeordneten Mengen heranziehen und alsdann den hier postulierten Satz von der vollständigen Induktion *beweisen* wird; man vergleiche hierfür einen unlängst erschienenen Aufsatz von Herrn *Zermelo* (Acta mathematica, Bd. 32 [1909], 185—193) und die betreffenden Bemerkungen in Herrn *Hessenbergs* Schrift: Grundbegriffe der Mengenlehre, Göttingen 1906 (S.-A. aus d. Abh. d. *Fries*schen Schule, I. Bd., 4. Heft).

†) In den Indizes, wo keine Verwechslung zu befürchten ist, werden die Plus- und Minuszeichen auch im folgenden Paragraphen stets ohne Hinzufügung eines Sterns im gewöhnlichen Sinn verwandt.

geschrieben werden. Es ist also $C_i < C_k$ oder $C_i > C_k$, je nachdem im gewöhnlichen Sinn $i \overset{*}{>} k$ oder $i \overset{*}{<} k$ ist ($i = \infty$ und $k = \infty$ eingeschlossen). Erst in § 3 wird es möglich sein, auf Grund einer besonderen, eine einzige Klasse als „Einheitsklasse" vor allen anderen auszeichnenden Eigenschaft eben dieser ein für allemal die Bezeichnung C_0 zuzuteilen.

Die Unabhängigkeit eines jeden der 7 Postulate $I'_{1)}$ bis $I'_{7)}$ von den 6 anderen erweisen folgende Systeme S_1 bis S_7, bei deren Bildung zur Erleichterung des Verständnisses statt der Klassen die gewöhnlichen ganzen Zahlen zur Verwendung kommen sollen mit Einschluß des ebenfalls als Zahl geltenden Symbols ∞, das die Stelle der Bezeichnung C_∞ vertritt und — außer im System S_3 — als im gewöhnlichen Sinn größer als jede ganze Zahl gilt.

S_1 sei das System der zwei Zahlen 0 und ∞, für das $<$ als $\overset{*}{\geqq}$ im gewöhnlichen Sinn interpretiert wird. Es ist $0/ = 0 = /0$; alle Postulate mit Ausnahme von $I'_{1)}$ sind erfüllt.

S_2 sei das System der drei Zahlen $0, 1, \infty$, wobei aber $<$ als „ungleich" zu interpretieren ist. $/0 = 0/ = 1$; $/1 = 1/ = 0$; alle Postulate mit Ausnahme von $I'_{2)}$ sind erfüllt.

S_3 sei das System aller ganzen Zahlen. Interpretiert man $<$ als $\overset{*}{>}$, also $C/$ als $C+1$, $/C$ als $C-1$, so sind außer $I'_{3)}$ alle Postulate erfüllt. (Auch das leere System läßt sich für S_3 verwenden.)

S_4 enthalte nur die einzige Zahl ∞ als Element; alle Postulate außer $I'_{4)}$ und den wirklich erfüllten Postulaten $I'_{1)}$ und $I'_{3)}$, wobei $<$ etwa „ungleich" bedeute, werden insofern befriedigt, als die jeweils gemachten Voraussetzungen eben überhaupt nicht eintreten können („vacuously", wie die Amerikaner sagen).

S_5 und S_6 seien die Systeme aller negativen bzw. aller positiven ganzen Zahlen inkl. ∞, wobei $<$ und daher $C/$ und $/C$ wie für S_3 zu erklären sind; außer $I'_{5)}$ bzw. $I'_{6)}$ sind alle Postulate erfüllt.

$S_{7)}$ endlich sei das System

$$\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots -3', -2', -1', 0', 1', 2', 3', \ldots \infty ;$$

jede nachfolgende Zahl dieser zweifach unendlichen Reihe soll jeder in ihr beliebig vorhergegangenen als in bezug auf die Relation $<$ vorangehend gelten, sodaß $C/$ die in dieser Reihe auf C unmittelbar folgende, $/C$ die in ihr der Zahl C unmittelbar vorangehende Zahl bedeutet. Alle Postulate mit Ausnahme von $I'_{7)}$ werden durch S_7 befriedigt.

II. *Der Ordnungstypus der Menge der Elemente einer Klasse.*

Ich wende mich nunmehr zu der zweiten auf S. 48 angekündigten Gruppe von Postulaten, die den Ordnungstypus der Elemente in den Klassen festlegt. Dabei soll in den Postulaten $\Lambda_{2)}$ bis $\Lambda_{9)}$ unter der allgemeinen Bezeichnung C stets eine (für den Fall, daß das Postulat $\Gamma'_{3)}$ betreffs der Existenz einer Klasse C_∞ erfüllt ist,) *von C_∞ verschiedene, sonst aber beliebige* Klasse aus S verstanden werden.

$\Lambda_{1)}$. *Enthält S eine Klasse C_∞ von der in $\Gamma_{3)}$ angegebenen Eigenschaft, so enthält C_∞ nur ein einziges Element.*

$\Lambda_{2)}$. *Sind α und β irgend zwei voneinander verschiedene Elemente einer und derselben Klasse C, so ist mindestens eine der Relationen $\alpha \prec \beta$ und $\beta \prec \alpha$ erfüllt.*

$\Lambda_{3)}$. *Für kein Element α einer Klasse C trifft die Relation $\alpha \prec \alpha$ zu.*

$\Lambda_{4)}$. *Sind α, β, γ irgend drei* (verschiedene oder teilweise miteinander identische) *Elemente einer Klasse C und ist $\alpha \prec \beta$, $\beta \prec \gamma$, so ist $\alpha \prec \gamma$.*

$\Lambda_{5)}$. *Unter den Elementen einer Klasse C ist eine unendliche abzählbare Menge M von Elementen derart enthalten, daß es in C zu jedem Element μ aus M, zu welchem überhaupt noch mindestens ein Element $\varkappa$ von der Eigenschaft $\varkappa \prec \mu$ in C existiert, ein nicht in der Menge M enthaltenes Element λ von solcher Beschaffenheit gibt, daß $\lambda \prec \mu$ ist und für kein Element ν aus C die beiden Relationen $\lambda \prec \nu$ und $\nu \prec \mu$ zugleich erfüllt sind.* Jede Klasse enthält also eine abzählbare Menge M von Elementen, die unmittelbare Vorgänger besitzen.

$\Lambda_{6)}$. *Sind α und β irgend zwei verschiedene, nur* (für den Fall, daß $\Lambda_{5)}$ erfüllt ist,) *nicht wie λ und μ in $\Lambda_{5)}$ zusammengehörige*) Elemente einer Klasse C und ist $\alpha \prec \beta$, so gibt es in C mindestens ein — und zwar* (für den Fall, daß Λ_5 erfüllt ist,) *der Menge M angehöriges — Element γ, das den Relationen $\alpha \prec \gamma$ und $\gamma \prec \beta$ genügt.* Die Menge M ist also in der Menge aller anderen Elemente einer Klasse überall dicht enthalten.

$\Lambda_{7)}$. *Ist eine Klasse C in zwei Teile C_1 und C_2, deren jeder wirklich Elemente enthält, auf solche Weise eingeteilt, daß jedes Element aus C einem und nur einem der Teile angehört und daß zwischen jedem Element α aus C_1 und jedem Element β aus C_2 die Relation $\alpha \prec \beta$ besteht, so exi-*

*) Dies besagt: Sollte β der Menge M angehören, so soll wenigstens α nicht der durch $\Lambda_{5)}$ geforderte Vorgänger von β sein.

stiert in C mindestens ein Element γ derart, daß jedes Element χ aus C, für das $\chi < \gamma$, aber nicht $\gamma < \chi$ gilt, dem Teil C_1, hingegen jedes Element ψ aus C, für das $\gamma < \psi$, aber nicht $\psi < \gamma$ gilt, dem Teil C_2 angehört. Die Menge der Elemente einer Klasse genügt also dem *Dedekind*schen Postulat der Lückenlosigkeit.

$\Lambda_{8)}$. *Jede Klasse C aus S* (außer C_∞) *enthält mindestens ein und zwar* (für den Fall, daß $\Lambda_{5)}$ erfüllt ist,) *der durch $\Lambda_{5)}$ geforderten Menge M angehöriges*) Element α_C von der Art, daß für jedes andere Element γ aus C gilt: $\alpha_C < \gamma$.*

$\Lambda_{9)}$. *Jede Klasse C aus S* (außer C_∞) *enthält mindestens ein und zwar* (für den Fall, daß $\Lambda_{5)}$ erfüllt ist,) *der durch $\Lambda_{5)}$ geforderten Menge M nicht angehöriges Element ω_C von der Art, daß für jedes andere Element γ aus C gilt: $\gamma < \omega_C$.*

Aus $\Lambda_{3)}$ und $\Lambda_{4)}$ folgt sofort als Ergänzung von $\Lambda_{2)}$, daß von den zwei Relationen $\alpha < \beta$ und $\beta < \alpha$ stets nur eine einzige erfüllt sein kann, womit jede Klasse als einfach geordnete Menge erwiesen ist; hieraus fließt wie oben das Bedürfnis, gleichbedeutend mit $\alpha < \beta$ die *neue Relationsbezeichnung* $\beta > \alpha$ („β ist höher als α“) einzuführen. Nach $\Lambda_{2)}$ ergibt sich, daß das in $\Lambda_{5)}$ betrachtete Element λ *eindeutig* als unmittelbarer Vorgänger von μ bestimmt ist; das nämliche gilt von den durch $\Lambda_{8)}$ und $\Lambda_{9)}$ geforderten Elementen α_C und ω_C. Bei Beachtung von $\Lambda_{6)}$ zeigt sich ferner, daß auch das Element γ in $\Lambda_{7)}$, das den Schnitt erzeugt, *eindeutig* bestimmt ist, ausgenommen den Fall, daß ein Element der Menge M das Anfangselement von C_2 ist.

Den Postulaten im einzelnen seien einige wenige Bemerkungen angefügt. Die explizite oder implizite Verwendung der transfiniten Kardinalzahl $\aleph_0$ dürfte sich, wenn man ausschließlich mit Postulaten, welche die *Ordnung***) betreffen, auskommen will, nur durch Einführung sehr komplizierter anderer Forderungen ersetzen lassen; man vergleiche hierüber einige Bemerkungen des Herrn *O. Veblen* betreffs der übrigens wesentlich ein-

*) Es genügt auch schon zu verlangen, daß α_C nicht der durch $\Lambda_{5)}$ geforderte Vorgänger eines Elementes aus M sein soll.

**) Bei Hinzunahme von Forderungen betreffs einer *Operation* (Addition, Multiplikation) läßt sie sich vielleicht vermeiden; doch soll eben in diesem Paragraphen ein in sich abgeschlossenes Ganzes allein auf Grund von Ordnungsbegriffen gegeben werden.

facheren Definition des Kontinuums (Transact. of the Amer. Math. Soc., vol. 6 [1905], 167). Das Postulat $\Lambda_{7)}$ ferner läßt auch dann noch die anderen Postulate unabhängig, wenn man die beiden Zusätze „aber nicht $\gamma < \chi$" und „aber nicht $\psi < \gamma$" streicht und dafür, um nicht $\Lambda_{3)}$ überflüssig zu machen, entweder „jedes *von γ verschiedene* Element χ" oder „jedes *von γ verschiedene* Element ψ" schreibt; das so abgeänderte Postulat würde immerhin noch wesentlich mehr fordern als in der ursprünglichen Fassung, da sich alsdann aus ihm schon ohne $\Lambda_{3)}$ die Unverträglichkeit zweier Relationen von der Form $\alpha < \beta$ und $\beta < \alpha$ folgern ließe. Schließlich sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß durch die Postulate $\Lambda_{8)}$ und $\Lambda_{9)}$ nicht einfach Endelemente gefordert werden, wie dies für entsprechende das Kontinuum betreffende Postulate zutreffen würde; vielmehr ist im vorliegenden Fall noch darauf zu achten, ob das Anfangselement einen Nachfolger und das Schlußelement einen Vorgänger hat, und erst aus $\Lambda_{8)}$ und $\Lambda_{9)}$ folgt, daß beide Möglichkeiten nicht zutreffen.

Man erkennt aus den Postulaten $\Lambda_{2)}$ bis $\Lambda_{9)}$ unmittelbar, daß mit Ausnahme von C_∞ *jede Klasse eine einfach geordnete, in sich dichte und abgeschlossene, also perfekte, aber nirgends dichte Menge mit Endelementen darstellt.* Daß durch die Postulate ein *Ordnungstypus* vollkommen eindeutig bestimmt ist, wird in § 4 gezeigt werden.

Bevor jetzt Beispiele bekannter Systeme, die sämtliche Postulate wirklich erfüllen, angegeben werden, erweist sich noch die Einführung zweier formaler Bezeichnungsweisen als nützlich: *Gehören zwei Elemente α und β zwei verschiedenen Klassen C_m und C_n an, so soll $\alpha < \beta$ (oder gleichbedeutend $\beta > \alpha$) geschrieben werden, wenn $C_m < C_n$, hingegen $\beta < \alpha$ (oder $\alpha > \beta$), wenn $C_n < C_m$ ist. Gehören zwei verschiedene oder identische Elemente α und β der nämlichen Klasse an,* so daß nach der zweiten Postulatengruppe stets eine und nur eine der Beziehungen $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$ gilt, *so soll dies durch die Schreibweise $\alpha \backsim \beta$* („α ist äquivalent zu β") *bezeichnet werden.* Wie man unmittelbar erkennt, ist die so definierte Äquivalenz eine determinierte, reflexive, symmetrische und transitive Relation, wie dies von jeder Äquivalenz ebenso wie von jeder Gleichheit zu fordern ist (vgl. Herrn *Loewy*s zitiertes Lehrbuch, S. 21). Man könnte noch, auf dem mit den letzten zwei Definitionen beschrittenen Wege weitergehend, der Relation $\alpha < \beta$ einen Sinn auch für den Fall beilegen, daß

α und β verschiedenen Klassen angehören, und damit das System S zu einer zweifach geordneten Menge machen; doch ist eine solche Festsetzung weder für die hier entwickelte allgemeine Theorie noch für die besonderen Zwecke der p-adischen Zahlen von Wert.

Nunmehr sollen einige *Beispiele* von Systemen angegeben werden, die sämtlichen Postulaten $\Gamma_{1)}$ bis $\Gamma_{7)}$ und $\Lambda_{1)}$ bis $\Lambda_{9)}$ genügen, insbesondere soll gezeigt werden, daß die Gesamtheit aller p-adischen Zahlen für ein beliebiges festes p ein solches System darstellt. Auf Grund des sich so ergebenden Materials wird es dann leicht sein, die Unabhängigkeit eines jeden der Postulate $\Lambda_{1)}$ bis $\Lambda_{9)}$ von den anderen zu erweisen.

1. *Der Bereich sämtlicher rationalen p-adischen Zahlen, wobei p eine bestimmte, aber völlig beliebig gewählte positive ganze rationale Primzahl oder zusammengesetzte Zahl bedeutet, in reduzierter Darstellung**). Jede Klasse enthält alle und nur die p-adischen Zahlen von gleicher Ordnungszahl; alle solche Zahlen werden deshalb als äquivalent bezeichnet, weil sie sich für alle Fragen der Teilbarkeit durch p voneinander nicht unterscheiden**). Von zwei nicht äquivalenten Zahlen α und β heißt nach der schon von Herrn *Hensel* eingeführten Bezeichnung α die kleinere ($\alpha < \beta$), wenn die ganzzahlige Ordnungszahl von α im gewöhnlichen Sinn größer als die von β ist, eine Definition, die sich sofort auf die Klassen übertragen läßt; ist C die Klasse aller p-adischen Zahlen von der Ordnungszahl n, so ist unter $C/$ die Klasse der Zahlen von der Ordnungszahl $n+1$, unter $/C$ die Klasse der Zahlen von der Ordnungszahl $n-1$ zu verstehen; C_∞ enthält nur das einzige die Ordnungszahl ∞ besitzende Nullelement. Nach diesen Erklärungen ist die Gültigkeit der Postulate $\Gamma_{1)}$ bis $\Gamma_{7)}$ und der aus ihnen gezogenen Folgerungen evident; interpretiert man C_0, wie es in § 3 geschehen wird, als die Einheitsklasse (d. i. die Klasse von der Ordnungs-

---

*) Die rationalen p-adischen Zahlen werden in reduzierter Form dargestellt durch alle Reihen $\sum_{i=n}^{\infty} a_i p^i$, wo n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder Null bedeutet und jedes a_i einen beliebigen der Werte $0, 1, \ldots p-1$ annehmen kann; der Index des ersten von 0 verschiedenen Koeffizienten a_i wird die Ordnungszahl der betreffenden p-adischen Zahl genannt.

**) Ferner spielen äquivalente p-adische Zahlen in der Funktionentheorie der p-adischen Zahlen die gleiche Rolle, wie in der gewöhnlichen Funktionentheorie komplexe Zahlen von dem nämlichen absoluten Betrag.

zahl 0), so gibt der Index jeder Klasse die Ordnungszahl ihrer Elemente an.

Die Relation $<$ definiere ich für die p-adischen Zahlen folgendermaßen: Sind α und β zwei verschiedene p-adische Zahlen von der gleichen Ordnungszahl und ist etwa $\alpha = \sum_{i=n}^{\infty} a_i p^i$, $\beta = \sum_{i=n}^{\infty} b_i p^i$, wo a_i und b_i Zahlen aus der Reihe $0, 1, \dots p-1$ sind, aber $a_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$ ist, so *soll dann und nur dann* $\alpha < \beta$ *gelten*, wenn

$$a_n = b_n,\ a_{n+1} = b_{n+1},\ \dots\ a_{n+m-1} = b_{n+m-1},\ \text{aber}\ a_{n+m} \overset{*}{<} b_{n+m}$$

ist, d. h. *wenn für den ersten Wert k von i, für den a_i von b_i verschieden ist, a_k im gewöhnlichen Sinn kleiner als b_k ist;* im umgekehrten Fall ist $\beta < \alpha$. Als die in $\mathcal{A}_5$) geforderte abzählbare Menge M betrachte ich die Menge aller unendlich vielen nach einer endlichen Zahl von Ziffern abbrechenden p-adischen Zahlen der betr. Klasse, die ja von selbst einem Teilbereich der natürlichen Zahlen umkehrbar eindeutig zugeordnet sind; ist $a_n p^n + a_{n+1} p^{n+1} + \dots + a_r p^r$ eine abbrechende Zahl, so hat sie in der Tat in bezug auf die Relation $<$ eine unmittelbare Vorgängerin in der Zahl $a_n p^n + a_{n+1} p^{n+1} + \dots + a_{r-1} p^{r-1} + (a_r - 1) p^r + (p-1)\, p^{r+1} + (p-1)\, p^{r+2} + \dots$. Für zwei nicht in dieser Weise zusammengehörige äquivalente p-adische Zahlen zeigt man genau wie für gewöhnliche reelle Zahlen in Dezimalbruchform, daß zwischen ihnen mindestens eine weitere abbrechende, also der Menge M angehörige p-adische Zahl liegt*); ebenso folgt mit bekannten Methoden leicht, daß jede Klasse ein lückenfreies System bildet, also auch $\mathcal{A}_7$) erfüllt ist**). Das niedrigste Element der Klasse,

---

*) Sind nämlich $\alpha = a_n p^n + \dots + a_{r-1} p^{r-1} + a_r p^r + a_{r+1} p^{r+1} + \dots$ und $\alpha' = a^n p^n + \dots + a_{r-1} p^{r-1} + a'_r p^r + a'_{r+1} p^{r+1} + \dots$, wo $a_r \overset{*}{<} a'_r$, zwei beliebig gegebene äquivalente p-adische Zahlen und gibt es mindestens einen positiven ganzzahligen Wert m, für den $a'_{r+m} \overset{*}{>} 0$ ist, so gelten z. B. für die abbrechende Zahl $\alpha'' = a_n p^n + \dots + a_{r-1} p^{r-1} + a'_r p^r$ die Relationen $\alpha < \alpha'' < \alpha'$. Verschwinden aber etwa alle auf a'_r folgenden Koeffizienten a'_{r+i}, so ist nach Voraussetzung α von der Zahl $a_n p^n + \dots + a_{r-1} p^{r-1} + (a'_r - 1) p^r + (p-1) p^{r+1} + (p-1) p^{r+2} + \dots$ verschieden, also etwa $\alpha = a_n p^n + \dots + a_{r-1} p^{r-1} + (a'_r - 1) p^r + (p-1) p^{r+1} + \dots + (p-1) p^{r+m-1} + a_{r+m} p^{r+m} + \dots$, wo $a_{r+m} \overset{*}{<} p-1$ $(m = 0, 1, 2, \dots)$; in diesem Fall liegt z. B. die abbrechende Zahl $\alpha'' = a_n p^n + \dots + a_{r-1} p^{r-1} + (a'_r - 1) p^r + (p-1) p^{r+1} + \dots + (p-1) p^{r+m}$ zwischen α und α'.

**) Ist nämlich etwa für die Klasse C, deren Zahlen die Ordnungszahl n besitzen, ein Schnitt (C', C'') von solchen Eigenschaften definiert, wie sie im Vordersatz

deren Zahlen die Ordnungszahl n haben, ist die abbrechende Zahl p^n, das höchste die nicht abbrechende Zahl $(p-1)p^n + (p-1)p^{n+1} + (p-1)p^{n+2} + \cdots$. Hiermit ist gezeigt, daß bei Einführung des verwendeten Ordnungsbegriffs *jedes System aller untereinander äquivalenten p-adischen Zahlen eine perfekte, nirgends dichte Menge mit Endelementen darstellt*, also z. B. auch die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt*).

---

von $\mathcal{A}_7$) vorausgesetzt wurden, und teilt man die Zahlen von C je nach dem Koeffizienten von p^n in $p-1$ Teile, die je nach dem Wert, den dieser Koeffizient für die Zahlen des betreffenden Klassenteils besitzt, mit $C_1, C_2, \ldots C_{p-1}$ bezeichnet seien, so sind zwei einander ausschließende Fälle möglich, die eine vollständige Disjunktion bilden: entweder die Zahlen einer gewissen Reihe von Klassenteilen $C_1, C_2, \ldots C_{a_n}$ fallen vollkommen mit den Zahlen von C' und also die Zahlen von $C_{a_n+1}, C_{a_n+2}, \ldots C_{p-1}$ mit denen von C'' zusammen, oder es gibt einen und nur einen wohlbestimmten Klassenteil C_{a_n} (a_n ist eine der Zahlen $1, 2, \ldots p-1$), der sowohl Zahlen aus C' wie auch solche aus C'' enthält. Im ersten Fall stellt ersichtlich jede der beiden Zahlen $a_n p^n + (p-1)p^{n+1} + (p-1)p^{n+2} + \cdots$ und $(a_n+1)p^n$ ein Element γ von den in $\mathcal{A}_7$) geforderten Eigenschaften dar; im zweiten Fall teile man den Klassenteil C_{a_n}, dessen sämtliche Zahlen mit $a_n p^n$ beginnen, je nach dem Wert des Koeffizienten von p^{n+1} in die p Unterteile $C_{a_n 0}, C_{a_n 1}, \ldots C_{a_n p-1}$. Es kann wieder vorkommen, daß das höchste Element eines dieser Unterteile mit dem höchsten Element von C' identisch ist, so daß dieses höchste Element ebensowohl wie das niedrigste des nächsten Unterteils den Schnitt (C', C'') erzeugt; im anderen Fall teile man denjenigen Unterteil $C_{a_n a_{n+1}}$, der Elemente sowohl aus C' wie aus C'' enthält, in der gleichen Weise weiter. So fortfahrend erhält man entweder, falls einmal der erste Fall eintritt, nach einer endlichen Zahl von Schritten zwei aufeinander folgende Zahlen, deren jede den in $\mathcal{A}_7$) an γ gestellten Forderungen genügt, oder es ergibt sich eine ins Unendliche fortlaufende wohldefinierte Reihe von Zahlen $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$, die sämtlich der Reihe $0, 1, \ldots p-1$ angehören, nur daß für a_n der Wert 0 ausgeschlossen ist. Man erkennt dann leicht, daß die durch diese Reihe eindeutig definierte p-adische Zahl $a_n p^n + a_{n+1} p^{n+1} + a_{n+2} p^{n+2} + \cdots$ die in $\mathcal{A}_7$) an γ gestellten Forderungen erfüllt, also den Schnitt (C', C'') erzeugt. Hiermit ist der Nachweis, daß $\mathcal{A}_7$) für jede Klasse äquivalenter p-adischer Zahlen erfüllt ist, vollkommen geführt.

*) Die Angabe des Herrn *Schoenflies*, die p-adischen Zahlen bildeten gleich den transfiniten Zahlen des Herrn *Veronese* einen homogenen Typus, der — gerade umgekehrt wie hier angegeben — zwar Lücken, aber keine Sprünge aufweise (D. Entw. d. Lehre v. d. Punktmannigf. II = 2. Ergänzungsbd. zu d. Jahresb. d. D. Math.-Ver. [1908], S. 54), bezieht sich zwar nicht auf die hier gegebene Art der Ordnung, trifft aber auch bei der dort gemeinten (nicht ausdrücklich angegebenen) Anordnung nur für einen *abzählbaren* Teilbereich des Bereichs aller rationalen p-adischen Zahlen zu.

2. Anstatt der vielfach als Beispiele nirgends dichter, perfekter Mengen betrachteten Systeme aller derjenigen systematischen Brüche von der Grundzahl g, unter deren Ziffern bestimmte aus der Reihe $0, 1, \ldots g-1$ *nicht* vorkommen, ziehe ich es vor, ein damit verwandtes, besonders naheliegendes Beispiel eines Systems S zu bringen, das die Vorzüge besitzt, jedermann vertraut zu sein und daher eine sehr leicht übersehbare Struktur zu besitzen und überdies mit dem unter 1. behandelten System der p-adischen Zahlen selbst in der Schreibweise der einzelnen Elemente völlig genau übereinzustimmen; wegen dieser Eigenschaften wird dieses System bei dem alsbald für die Postulate $A_{1)}$ bis $A_{9)}$ zu führenden Unabhängigkeitsbeweis als Grundlage dienen. Das System S enthalte *alle* (echten und unechten) *endlichen und unendlichen Dezimalbrüche**) (die ganzen Zahlen natürlich eingeschlossen); da sich bekanntlich jede reelle Zahl (außer Null) stets und nur auf eine einzige Weise als unendlicher und höchstens auf eine einzige Weise als endlicher Dezimalbruch darstellen läßt, so enthält S alle in endliche Dezimalbrüche entwickelbaren reellen Zahlen außer Null zweimal, alle anderen einmal. Zu einer Klasse mögen alle und nur die Zahlen gerechnet werden, die links vom Komma gleichviel Stellen bzw. rechts unmittelbar hinter dem Komma gleichviel Nullen haben, d. h. die, etwas weniger genau ausgedrückt, der Größe nach zwischen den nämlichen zwei Potenzen von 10 liegen; C_∞ enthalte die einzige Zahl Null. Definiert man für Zahlen verschiedener Klassen $<$ als kleiner**) im gewöhnlichen Sinn, so daß man aus den Zahlen von $\dot{C}$ die von $C/$ durch Verschiebung des Kommas um eine Stelle nach links, die von $/C$ durch eine gleiche Verschiebung nach rechts erhält, so sind ersichtlich die Postulate der ersten Gruppe erfüllt. Um auch diejenigen der zweiten Gruppe zu befriedigen, interpretiere man für zwei ungleiche Zahlen derselben Klasse $\prec$ als kleiner im gewöhnlichen Sinne; von zwei im gewöhnlichen Sinn gleichen Zahlen derselben Klasse soll die in einen unendlichen Dezimalbruch entwickelte der Darstellung durch einen endlichen Dezimalbruch in bezug auf $\prec$ vorangehen. Unter der abzählbaren Menge M ist demnach die Menge aller endlichen Dezimalbrüche der betreffenden Klasse zu verstehen; aus den Elementen der Theorie der reellen Zahlen weiß man, daß $A_{6)}$ und $A_{7)}$ erfüllt sind; bezeichnet man die Klasse, welche die Zahl 1 enthält, mit C_0, so ist das Anfangselement der Klasse C_n 10^{-n}, das Endelement $10^{-n} \cdot 9{,}99\ldots$.

3. Ein sehr einfaches *geometrisches* Beispiel für den betrachteten Ordnungstypus ist das folgende: Man denke sich die nach beiden Seiten hin unendliche Reihe aller äquidistanter (Abstand beliebig) Strecken C_i, die untereinander und etwa zur y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen x-Achse von links nach rechts läuft, parallel sind und deren beiderseitige Endpunkte sämtlich die Ordinaten 0 und 1 besitzen mögen (diese größtenteils der Sache nach überflüssigen speziellen

*) Wörtlich dasselbe gilt, wenn man statt 10 eine beliebige andere von 1 verschiedene natürliche Zahl als Grundzahl der systematischen Brüche wählt, etwa zur Herstellung vollkommener Übereinstimmung mit dem unter 1. betrachteten System die Zahl p.

**) Nur ist freilich die niedrigste Zahl der größeren Klasse stets der höchsten Zahl der nächstkleineren im gewöhnlichen Sinn gleich, z. B. $10 = 9{,}99\ldots$, aber im oben definierten Sinn $10 > 9{,}99\ldots$.

Festsetzungen sollen nur einer bestimmten Veranschaulichung dienen). Interpretiert man $>$ als „links von", so besitzt die Menge dieser Strecken einschließlich eines Punktes C_∞, der als rechts von allen Strecken gelegen betrachtet werden möge, ersichtlich den Typus $^*\omega + \omega + 1$; ist C eine beliebige der Strecken, so ist $C/$ die nach rechts, $/C$ die nach links benachbarte. Mit jeder der Strecken (der Punkt C_∞ enthalte sich selbst als einziges Element) verfahre man nun auf folgende Weise, die eine für den vorliegenden Zweck bequeme Modifikation einer zuerst von *H. I. St. Smith**) verfolgten Methode darstellt: Man teile jede Strecke in eine ungerade Zahl von (gleichen oder ungleichen) Abschnitten und zwar, wenn man eine besonders bequeme und deutliche Beziehung zu einem System von p-adischen Zahlen zu erhalten wünscht,

(2) (2,2) (2,1) (2,0) am besten in $2p-3$ Abschnitte, von denen man den 2., 4., ... $(2p-4)$-ten Abschnitt besonders markiere (vgl. nebenstehende Figur, für die $p = 3$ angenommen wurde); die nicht markierten Abschnitte bezeichne man, von unten (der x-Achse aus) beginnend, mit $(1), (2), \ldots (p-1)$, wofür allgemein (a_0) geschrieben werde. Jeden Abschnitt (a_0) teile man ebenso in $2p-1$ Abschnitte, von denen der 2., 4., ... $(2p-2)$-te markiert werde; die p nicht markierten Abschnitte eines jeden (a_0) mögen, wieder von unten angefangen, die Bezeichnungen $(a_0, 0), (a_0, 1), \ldots (a_0, p-1)$, allgemein (a_0, a_1) erhalten. Ebenso wie die Abschnitte (a_0) behandle man nun die Abschnitte (a_0, a_1), indem man jeden in $2p-1$ Teile teilt usw.; dieses Verfahren werde unbegrenzt fortgesetzt. Nach dem k-ten Schritte hat man $(p-1)p^{k-1}$ nicht markierte Abschnitte $(a_0, a_1, a_2, \ldots a_{k-1})$, wo a_0 die Werte $1, 2, \ldots p-1$, jedes der anderen a_i aber simultan die Werte $0, 1, \ldots p-1$ durchläuft. Betrachtet man nun die Menge aller derjenigen Punkte einer Strecke einschließlich ihrer Endpunkte, die entweder Endpunkte markierter Abschnitte sind oder nicht auf markierten Abschnitten liegen, so erfüllt diese Menge, wenn man $<$ etwa als „unterhalb" interpretiert, alle Postulate A_2 bis A_9, sie ist insbesondere nirgends dicht, da markierte Abschnitte überall dicht liegen und zwischen den zwei Endpunkten eines markierten Abschnitts kein weiterer Punkt der Menge liegt, und auch abgeschlossen, wie man durch Zuordnung eines Systems von unendlichen systematischen Brüchen, deren Ziffern gewissen Beschränkungen unterworfen werden (wie solche schon zu Beginn von Beispiel 2. erwähnt wurden)**), unschwer einsieht. *Eine umkehrbar eindeutige ähnliche Zuordnung der p-adischen Zahlen zu der so betrachteten Punktmenge* läßt sich sehr einfach ausführen: Man bezeichne eine beliebige Strecke C mit [0] und von ihr ausgehend die nach rechts folgenden mit $[1], [2], [3], \ldots$, die nach links folgenden mit $[-1], [-2], [-3], \ldots$; dann lasse man den besonders eingeführten, auf C_∞ gelegenen Punkt der p-adischen Zahl Null, ferner

(1) (1,2) (1,1) (1,0)

---

*) Proceed. of the London Math. Soc., (1) vol. 6 (1875), 147 f. = *Smith*, Collected mathematical papers, vol. II (Oxford 1894), p. 94 f.; man vgl. jedoch hierzu die Bemerkungen von Herrn *W. H. Young*, ebenda, (1) vol. 34 (1902), 286, Fußnote.

**) In weitgehender Weise hat Herr *Schoenflies* Systeme von Brüchen ähnlicher Art zum Zwecke der Abbildung von Würfeln verschiedener Dimensionen aufeinander verwendet (Nachr. v. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Kl., Jahrg. 1896, S. 255—266).

die auf der Strecke $[i]$ gelegenen Punkte den p-adischen Zahlen von der Ordnungszahl i derart entsprechen, daß der Zahl $p^i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ ($a_0 = 1, 2, \ldots p-1$, während für $k \overset{*}{>} 0$ $a_k = 0, 1, \ldots p-1$ sein kann) derjenige Punkt der Strecke $[i]$ zugeordnet ist, der bei der unbegrenzt fortgesetzten Teilung von $[i]$ durch die Vorschrift $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ bestimmt ist. Man kann hiernach insbesondere zu jeder abbrechenden p-adischen Zahl und jeder Vorgängerin einer solchen den zugeordneten Punkt der Menge durch ein *endliches* Verfahren leicht bestimmen.

Es erübrigt noch, den Beweis der Unabhängigkeit eines jeden der Postulate $\mathcal{A}_{1)}$ bis $\mathcal{A}_{9)}$ von den übrigen zu erbringen.

S_2' sei das in Beispiel 2. betrachtete System; nur soll in C, wenn μ und μ' ($\mu \overset{*}{<} \mu'$) zwei von α_C verschiedene, sonst aber beliebige feste Elemente der Menge M bedeuten, jedes im Sinn von Beispiel 2. zwischen μ inkl. und μ' exkl. gelegene Element aus C überhaupt mit keinem Element aus C außer mit den Endelementen α_C und ω_C durch die Relation $<$ verbunden sein, mit α_C und ω_C aber unverändert in dem unter 2. angegebenen Sinne, der den Postulaten $\mathcal{A}_{8)}$ und $\mathcal{A}_{9)}$ Rechnung trägt. Da $\mathcal{A}_{7)}$ insofern befriedigt ist, als mit Ausnahme der beiden Fälle, daß entweder C_1 aus dem einzigen Element α_C oder C_2 aus dem einzigen Element ω_C besteht, in S_2' die Voraussetzungen von $\mathcal{A}_{7)}$ überhaupt nicht eintreten können, so erfüllt S_2' alle Postulate außer $\mathcal{A}_{2)}$.

S_3' sei das unter 2. betrachtete System, nur daß in allen Fällen, wo keine der Zahlen α und β aus C einen endlichen oder einen die Periode 9 besitzenden Dezimalbruch darstellt, die Relation $\alpha < \beta$ als $\alpha \overset{*}{\leqq} \beta$ zu interpretieren ist. Alle Postulate außer $\mathcal{A}_{3)}$ sind erfüllt.

S_4' sei ebenfalls das unter 2. betrachtete System mit der Abänderung, daß zwischen zwei von α_{C_n} und ω_{C_n} verschiedenen Zahlen der Klasse C_n, von denen die eine mindestens um $10^{-n} \cdot 5$ von der anderen übertroffen wird, gerade die umgekehrte Beziehung, wie in Beispiel 2. festgesetzt, bestehen soll (also $\beta < \alpha$ statt $\alpha < \beta$), während zwischen zwei Zahlen, die sich um höchstens $10^{-n} \cdot 4{,}99\ldots$ unterscheiden oder von denen eine α_C oder ω_C ist, die Relation $<$, wie unter 2. definiert, beibehalten werde. Bei dieser Festsetzung werden außer $\mathcal{A}_{4)}$ alle Postulate erfüllt (z. B. wird $\mathcal{A}_{6)}$, falls $\alpha = 7$ und $\beta = 2$ in C_0 gegeben sind, durch $\gamma = 9$ befriedigt, weil in dem hier definierten Sinn $7 < 9 < 2$ ist); $\mathcal{A}_{7)}$ kommt, wie man sich unschwer überzeugt, außer in den Fällen $C_1 = |\alpha_C|$ oder $C_2 = |\omega_C|$ überhaupt nicht in Betracht.

S_5' unterscheide sich von dem in Beispiel 2. betrachteten System darin, daß C_n alle im gewöhnlichen Sinn ungleichen reellen Zahlen (etwa alle nicht abbrechenden Dezimalbrüche) zwischen 10^{-n}*) und $10^{-n} \cdot 9{,}99\ldots$, beide Grenzen eingeschlossen, enthalte; $\prec$ ist als kleiner im gewöhnlichen Sinn zu interpretieren. S_5' erfüllt alle Postulate mit Ausnahme von $\mathcal{A}_{5)}$.

In S_6' sei die Einrichtung der einzelnen Klassen folgende: C_n enthält alle nicht abbrechenden Dezimalbrüche zwischen 10^{-n} inkl.*) und $10^{-n} \cdot 9{,}99\ldots$ exkl.. Jede im gewöhnlichen Sinn zwischen 10^{-n} und $10^{-n} \cdot 4{,}99\ldots$ (beide Grenzen ausgeschlossen) liegende Zahl geht der im gewöhnlichen Sinn um $5 \cdot 10^{-n}$ größeren, ebenfalls als nicht abbrechender Dezimalbruch geschriebenen Zahl in bezug auf die Relation $\prec$ unmittelbar voraus, so daß zwischen zwei so zusammengehörigen Zahlen keine andere Zahl liegt; zwischen zwei Zahlen aus C_n, von denen keine im gewöhnlichen Sinn den Wert $10^{-n} \cdot 4{,}99\ldots$ übersteigt, hat die Relation $\prec$ die Bedeutung „kleiner" im gewöhnlichen Sinn. Hiermit ist auf Grund von $\mathcal{A}_{3)}$ und $\mathcal{A}_{4)}$ die Bedeutung von $\prec$ für irgend zwei Zahlen einer Klasse bereits vollkommen festgelegt. Man mag nun unter der in $\mathcal{A}_{5)}$ geforderten Menge M irgend eine passend gewählte abzählbare Menge verstehen, etwa die aller im gewöhnlichen Sinn den Wert $10^{-n} \cdot 4{,}99\ldots$ übertreffenden periodischen Dezimalbrüche mit Einschluß von 10^{-n}, immer wird $\mathcal{A}_{6)}$ unerfüllt bleiben, weil die Menge aller leeren Intervalle die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt. Alle anderen Postulate sind erfüllt; es ist $\alpha_{C_n} = 10^{-n}$, $\omega_{C_n} = 10^{-n} \cdot 4{,}99\ldots$.

In S_7' enthalte C_n alle periodischen Dezimalbrüche (einschließlich der endlichen) zwischen 10^{-n} und $10^{-n} \cdot 9{,}99\ldots$, beide Grenzen eingeschlossen; alle Erklärungen sind wie in Beispiel 2. zu treffen. Mit Ausnahme von $\mathcal{A}_{7)}$ werden alle Postulate befriedigt.

Um schließlich die Systeme S_8' bzw. S_9' zu konstruieren, die alle Postulate außer $\mathcal{A}_{8)}$ bzw. $\mathcal{A}_{9)}$ erfüllen sollen, hat man an dem in Beispiel 2. betrachteten System nur die eine Änderung zu treffen, daß man aus C_n das Anfangselement 10^{-n} bzw. das Schlußelement $10^{-n} \cdot 9{,}99\ldots$ wegläßt.

Die Unabhängigkeitsnachweise für die letzte Postulatengruppe haben sich vor allem deshalb nicht ganz einfach gestaltet, weil es in Rücksicht auf $\mathcal{A}_{5)}$ nicht anging, mit endlichen Klassen zu operieren. Da die Unab-

*) 10^{-n} ist ausnahmsweise ein abbrechender Dezimalbruch.

hängigkeit der Postulate der ersten Gruppe von denen der zweiten und ebenso die Unabhängigkeit des Postulates $A_{1)}$ selbstverständlich ist, so ist der Nachweis vollkommen geführt, daß *jedes der 16 Postulate* $\Gamma_{1)}$ *bis* $\Gamma_{7)}$ *und* $A_{1)}$ *bis* $A_{9)}$ *von den 15 anderen unabhängig ist.*

§ 3. Der Körper der p-adischen Zahlen. Die p-adischen und die g-adischen Systeme.

Das System S ist im voraufgegangenen Paragraphen lediglich in Hinblick auf die äußere Anordnung seiner Elemente betrachtet worden. Um das System nun nach anderer Richtung hin zu behandeln, sollen im folgenden zu den Relationen $<$ und $>$ noch zwei Verknüpfungen oder Operationen mit den Zeichen $+$ und $\cdot$ eingeführt und zu diesem Zweck 12 Postulate $\Pi_{1)}$ bis $\Pi_{12)}$ vorangestellt werden; von diesen betreffen die 9 ersten ausschließlich Eigenschaften, die allen einen Körper bildenden Bereichen gemeinsam sind, während sich aus den drei letzten Postulaten ungewöhnliche, das System S in besonderem Maße charakterisierende Folgerungen ergeben.

$\Pi_{1)}$. *Sind* α *und* β *irgend zwei identische oder verschiedene Elemente aus* S, *so ist durch* α *und* β *(in dieser Reihenfolge) mittels der Operation* $+$ *ein Element* σ *aus* S *eindeutig bestimmt;* zur Andeutung dieses Sachverhalts schreibt man: $\sigma = \alpha + \beta$.

Diese Operation soll *Addition*, das Resultat σ *Summe* heißen.

$\Pi_{2)}$. *Sind* α, β, γ *irgend drei Elemente aus* S, *so ist* $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$; die eingeführte Addition ist also *assoziativ.*

$\Pi_{3)}$. *Existiert in* S *mindestens ein in diesem Fall mit* o (in Worten als *Nullelement*) *zu bezeichnendes Element von der Art, daß für jedes Element* α *aus* S $\alpha + o = \alpha$ *ist, so enthält* S *zu einem besonderen Nullelement* o *und jedem Element* α *aus* S *mindestens je ein zugehöriges Element* α' *von der Eigenschaft* $\alpha + \alpha' = o$.

$\Pi_{4)}$. *Sind* α *und* β *irgend zwei identische oder verschiedene Elemente aus* S, *so ist durch* α *und* β *(in dieser Reihenfolge) mittels der Operation* $\cdot$ *ein Element* π *aus* S *eindeutig bestimmt;* zur Andeutung dieses Sachverhalts schreibt man: $\pi = \alpha \cdot \beta$.

Diese Operation soll *Multiplikation*, das Resultat π *Produkt* heißen.

$\Pi_{5)}$. *Sind* α, β, γ *irgend drei Elemente aus* S, *so ist* $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$; die eingeführte Multiplikation ist also *assoziativ.*

$\Pi_{6)}$. *Das System S enthält mindestens ein mit ε* (in Worten als *Einheitselement*) *zu bezeichnendes Element derart, daß für jedes Element α aus S $\alpha \cdot \varepsilon = \alpha$ ist.*

Vor der Formulierung von $\Pi_{7)}$ ist die folgende Bezeichnungsweise einzuführen: Ist o ein wie in $\Pi_{3)}$ definiertes Nullelement und sind α und β irgend zwei Elemente aus S, für die $\alpha \cdot \beta = o$ ist, während β von o verschieden ist, so heißt α ein *Teiler der Null.*

$\Pi_{7)}$. *Enthält S ein Einheitselement und ist α irgend ein beliebiges Element aus S, das nur kein Teiler der Null ist, so enthält S zu einem besonderen Einheitselement ε und zu α mindestens ein Element α'', für das $\alpha \cdot \alpha'' = \varepsilon$ ist.*

$\Pi_{8)}$. *Sind α und β irgend zwei Elemente aus S, so ist $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;* die eingeführte Multiplikation ist also *kommutativ.*

$\Pi_{9)}$. *Sind α, β, γ irgend drei Elemente aus S, so gilt das folgende distributive Gesetz: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.*

Zur Formulierung der zwei folgenden Postulate empfiehlt es sich, den Begriff der *Vielfachen eines Elements aus S* einzuführen durch die Definitionen

$$\alpha = 1\alpha, \quad m\alpha + \alpha = (m \overset{*}{+} 1)\alpha^{*}),$$

wo α ein beliebiges Element aus S darstellt; da die vervielfältigenden Symbole ersichtlich denselben Forderungen (den *Peano*schen Postulaten) genügen wie die natürlichen Zahlen, so sind sogleich deren Bezeichnungen (m bedeutet eine beliebige natürliche Zahl) und ihr Additionszeichen $\overset{*}{+}$ benutzt worden (ebenso im weiteren das Subtraktionszeichen $\overset{*}{-}$ und das Multiplikationszeichen $\overset{*}{\cdot}$); es ist also $\alpha + \alpha = 2\alpha$, $(\alpha + \alpha) + \alpha = 3\alpha$ usw.. Es ist kaum nötig zu betonen, daß die Einführung dieser Bezeichnungsweise lediglich der Bequemlichkeit dient und keineswegs etwas Neues oder Notwendiges darstellt.

$\Pi_{10)}$. *Enthält S ein Einheitselement, so gibt es zu einem besonderen Einheitselement ε in der Reihe der Vielfachen $2\varepsilon, 3\varepsilon, 4\varepsilon$ usw. ein erstes Vielfaches $p\varepsilon$, das der nächstkleineren Klasse als ε angehört.* Die natürliche

---

*) Um nicht ein neues Operationszeichen einführen zu müssen, stelle ich die vervielfältigende natürliche Zahl dem zu vervielfältigenden Element aus S ohne verbindendes Zeichen einfach voran.

Zahl p, die nicht für jedes allen Postulaten genügende System S die nämliche sein wird*), heiße die *Grundzahl des Systems S.*

$\Pi_{11)}$. *Ist α ein beliebiges, von den in S etwa vorhandenen Nullelementen verschiedenes Element aus S und γ ein solches Element aus S, daß keines der $p \stackrel{*}{-} 1$ ersten Vielfachen von γ ($\gamma, 2\gamma, \ldots (p \stackrel{*}{-} 1)\gamma$) der nächstkleineren Klasse als γ angehört* (p bedeutet die Grundzahl von S), *so folgt aus $\beta < \gamma$ stets $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$.*

$\Pi_{12)}$. *Sind α und β irgend zwei Elemente aus S und ist $\beta < \alpha$, so ist $\alpha + \beta \backsim \alpha$.*

An die Aufzählung der Postulate sei sogleich die Bemerkung angereiht, daß die 9 ersten Postulate an Herrn *Dicksons* letzte Definition des Körpers**) anknüpfen, die mir die einfachste zu sein scheint***); ein wesentlicherer Unterschied liegt nur darin, daß es an dieser Stelle auf Grund der übrigen Postulate möglich war, die Forderung der Existenz eines Nullelements ganz wegzulassen und die Forderung der Existenz der reziproken Elemente (in $\Pi_{7)}$) wenigstens erheblich abzuschwächen. Der Versuch, die *Unabhängigkeit* der einzelnen Postulate von den anderen hier und in § 2 angegebenen zu erweisen, ist in diesem Paragraphen ebenso wie im folgenden ganz beiseite gelassen worden, da diese Aufgabe in einzelnen Fällen einigen Schwierigkeiten begegnen und zu breiter Untersuchung besonders konstruierter Systeme nötigen dürfte; ich hoffe, bei der Auswahl und der Formulierung der Postulate†) hinreichend vorsichtig verfahren zu sein,

*) Wohl aber ist die Existenz verschiedener (zu verschiedenen Einheitselementen gehöriger) Werte von p für das nämliche System ausgeschlossen, da dieses nur ein einziges Einheitselement ε enthalten kann; wäre nämlich ε' ein anderes Einheitselement, so folgte $\varepsilon' = \varepsilon' \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \varepsilon'$ (nach $\Pi_{8)}$) $= \varepsilon$. Daher ist die Grundzahl von S stets eindeutig bestimmt.

**) Trans. of the Am. Math. Soc., vol. 6 (1905), 198—204; vgl. auch das zitierte *Loewy*sche Lehrbuch, Kap. I, § 7.

***) Über andere abstrakte Körperdefinitionen vergleiche man die a. a. O., S. 181—184 von Herrn *Huntington* zitierte Literatur. Von den Postulaten des Herrn *Steinitz* (dieses Journal, Bd. 137 [1910], 172 f.) scheinen das 6. und 7. etwas viel zu fordern, während das 2. überhaupt überflüssig wird, wenn man zum 6. die Hinzufügung macht, daß ebenso wie die Gleichung $a + x = b$ auch die Gleichung $x + c = d$ stets eine Lösung besitzen soll.

†) In diesen sind der Kürze halber die formalen Zusätze „falls die betr. Elemente in S existieren" meist weggelassen worden.

um wenigstens die Möglichkeit, ein ganzes Postulat oder einen wesentlichen Teil eines solchen mit Hilfe der anderen Postulate zu beweisen, ausgeschlossen zu haben*). Da § 2 für sich und ebenso § 2 und § 3 zusammen je ein abgeschlossenes Ganzes bilden, so ist natürlich die Unabhängigkeit gegenüber den in einem späteren Paragraphen auftretenden Postulaten an keiner Stelle angestrebt.

Ich knüpfe vorerst an $\Pi_{10)}$ an. Ist α irgend ein von den in S etwa vorhandenen Nullelementen verschiedenes Element aus S, so ist, da sich bekanntlich das assoziative Gesetz $\Pi_{2)}$ auf beliebig viele Summanden ausdehnen läßt,

$$p\alpha = \alpha + \alpha + \cdots + \alpha = \alpha\cdot\varepsilon + \alpha\cdot\varepsilon + \cdots + \alpha\cdot\varepsilon = \alpha\cdot(\varepsilon + \varepsilon + \cdots + \varepsilon) = \alpha\cdot p\varepsilon,$$

wo ε ein dem Postulat $\Pi_{10)}$ genügendes Einheitselement bedeutet; da ε hiernach die in $\Pi_{11)}$ an γ gestellten Anforderungen erfüllt und $\alpha = \alpha\cdot\varepsilon$, $p\varepsilon < \varepsilon$ ist, so folgt aus $\Pi_{11)}$: $p\alpha < \alpha$. Es sei nun m die *kleinste* natürliche Zahl, für die $m\alpha < \alpha$ ist; wäre $p = m \overset{*}{\cdot} r \overset{*}{+} n$, wo $n = 1, 2, \ldots m \overset{*}{-} 1$, so folgte $n\alpha \gtrsim \alpha > m\alpha$, also nach $\Pi_{12)}$

$$(n \overset{*}{+} m)\,\alpha = n\alpha + m\alpha \gtrsim \alpha,\ (n \overset{*}{+} 2 \overset{*}{\cdot} m)\,\alpha \gtrsim \alpha, \ldots (n \overset{*}{+} r \overset{*}{\cdot} m)\,\alpha = p\alpha \gtrsim \alpha$$

in Widerspruch mit dem soeben erzielten Resultat $p\alpha < \alpha$; daher ist m notwendig ein Teiler von p.

Systeme S, deren Grundzahl p eine *Primzahl* ist, sollen von nun an stets *p-adische Systeme* heißen, während für den Fall einer *zusammengesetzten Grundzahl* diese mit g und das System S als *g-adisches System* bezeichnet werden mag. Mittels dieser Bezeichnungsweise lassen sich die letzten Resultate zusammenfassen in

Satz 1: *Bezeichnet α irgend ein beliebiges, nur von den etwaigen Nullelementen verschiedenes Element aus S, so ist stets $p\alpha < \alpha$, wenn p die Grundzahl von S bedeutet. Insbesondere ist für ein p-adisches System S das Element $p\alpha$ das erste in der Reihe der Vielfachen $2\alpha, 3\alpha, \ldots,$ das*

*) Auch $\Pi_{3)}$ dürfte nicht, wie dies zunächst scheinen könnte, beweisbar sein. Daß es in $\Pi_{10)}$ nicht genügt — wie zu vermuten nahe liegt — zu fordern, daß $p\varepsilon$ *überhaupt kleiner* als ε sei, zeigt das Beispiel der Systeme algebraischer p-adischer Zahlen mit einer durch p teilbaren Körperdiskriminante, für die das erste kleinere Vielfache von ε einer beliebig weit von der Einheitsklasse entfernten Klasse angehören kann, während alle anderen Postulate der §§ 2 und 3 (bei einer unwesentlichen formalen Änderung von $\Pi_{11)}$) erfüllt sind.

kleiner als α ist); für ein g-adisches System S ist, wenn $m\alpha$ das erste Vielfache von der Eigenschaft $m\alpha < \alpha$ in dieser Reihe darstellt, m ein Teiler der Grundzahl g, g selbst eingeschlossen**).*

Die größere Einfachheit, die die Gesetze in p-adischen Systemen vor denen in g-adischen auszeichnet, liegt großenteils an der Bestimmtheit der Angabe, die Satz 1 für p-adische Systeme macht.

Aus Satz 1 fließt sofort die Existenz mindestens eines Nullelements in einem p-adischen oder g-adischen System S. Nach den Postulaten $I'_{3)}$ und $\Lambda_{1)}$ des § 2 enthält nämlich S ein Element, das kleiner ist als jedes andere Element aus S und für den Moment mit $\bar{o}$ bezeichnet sei. Nach Satz 1 ist, falls $\bar{o}$ kein Nullelement von S ist, $p\bar{o} < \bar{o}$ bezw. $g\bar{o} < \bar{o}$; da dies dem Wesen von $\bar{o}$ nach ausgeschlossen ist, so muß in der Tat $\bar{o}$ ein Nullelement sein***). Fügt man die Tatsache der Existenz mindestens eines Nullelements den Postulaten $\Pi_{1)}$ bis $\Pi_{3)}$ hinzu, so ergibt sich, daß das System S in bezug auf die Addition eine (vorläufig nicht kommutative) Gruppe bildet, in der es bekanntlich nur ein einziges Nullelement geben kann (vgl. *Dickson*, a. a. O.). Man hat also:

Satz 2: *Jedes p-adische oder g-adische System S bildet in bezug auf die eingeführte Addition eine Gruppe; Nullelement o ist das einzige Element der Klasse C_∞.*

Hiermit sind für die in S eingeführte Addition alle in einer Gruppe geltenden Gesetze als bewiesen anzusehen; insbesondere läßt sich unmittelbar eine Subtraktion mit dem Operationszeichen — definieren durch die Festsetzung $\alpha - \beta = \alpha + \beta'$, wo α und β beliebige Elemente aus S darstellen und β' das eindeutig bestimmte Element aus S ist, das mit β durch die Beziehung $\beta + \beta' = o$ zusammenhängt.

---

*) Es ist auch mit den bisherigen Mitteln unschwer zu beweisen, daß die $p \overset{*}{-} 1$ bzw. $m \overset{*}{-} 1$ ersten Vielfachen von α sämtlich derselben Klasse angehören und daß insbesondere für $\alpha = \varepsilon$ auch in jedem g-adischen System $m = g$ ist; doch wird von diesen Tatsachen im folgenden außer in unwesentlichen Beispielen kein Gebrauch gemacht.

**) Daß es für den Fall einer zusammengesetzten Grundzahl g auch wirklich vorkommen kann, daß m ein *echter* Teiler von g ist, beweist für $g = m \overset{*}{\cdot} n$ z. B. das Element $n\varepsilon \frown \varepsilon$, für das $m(n\varepsilon) = g\varepsilon < n\varepsilon$ ist.

***) Man könnte dies auch auf anderem, die Definition des Nullelements betrachtendem Wege nachweisen; auch dann aber hat man sich wesentlich darauf zu stützen, daß $\bar{o}$ das *kleinste* Element des Systems ist.

Es ist nun sehr leicht, die in dem folgenden Satz ausgedrückte interessanteste Eigenschaft der in S eingeführten Addition nachzuweisen:

Satz 3: *Sind α und β irgend zwei beliebige zueinander äquivalente Elemente eines p-adischen oder g-adischen Systems S, so ist ihre Summe $\alpha+\beta$ entweder äquivalent zu jedem der Summanden oder kleiner als jeder von ihnen*). Sind insbesondere α und β irgend zwei nicht äquivalente Elemente aus S, von denen α das größere ist, so ist es daher unmöglich, eine (im gewöhnlichen Sinn) noch so große natürliche Zahl n von der Art zu finden, daß $n\beta$ äquivalent oder größer als α wird: jedes p-adische oder g-adische System S ist also in bezug auf die Größenrelation ein nichtarchimedisches System.*

Man sieht zunächst, daß das nach $\Pi_{3)}$ zu jedem Element β gehörige entgegengesetzte Element β' stets zu β äquivalent sein muß, weil im anderen Fall die Summe $\beta+\beta'$ nach $\Pi_{12)}$ die Größe des größeren der Summanden besäße. Es sei nun $\alpha \backsim \beta$, also auch $\alpha \backsim \beta'$; wäre $\alpha+\beta > \alpha$, so folgte nach $\Lambda_{12)}$: $(\alpha+\beta)+\beta' > \alpha$, während andererseits

$$(\alpha+\beta)+\beta' = \alpha+(\beta+\beta') = \alpha+o = \alpha$$

ist. Daher ist die Annahme $\alpha+\beta > \alpha$ falsch, der Satz also bewiesen. Der sich hieraus unmittelbar ergebende zweite Teil des Satzes hätte sich übrigens auch schon *vor* Satz 2 beweisen lassen.

Von den zahlreichen Folgerungen, die aus den letzten Sätzen gezogen werden können, soll hier nur noch ein besonders interessanter, von Herrn *Hensel* bereits hervorgehobener**) Konvergenzsatz angeführt werden. Eine ins Unendliche fortlaufende Reihe $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots$ von Elementen aus S heiße *konvergent*, wenn es zu einem beliebig klein vorgegebenen Element $\sigma \neq o$ stets einen Indexwert m derart gibt, daß für jede ganze positive Zahl n

$$\alpha_m+\alpha_{m+1}+\cdots+\alpha_{m+n-1} < \sigma$$

wird. Führt man noch das Limeszeichen ganz entsprechend der üblichen Bedeutung ein, so folgt:

Satz 4: *Notwendig und hinreichend für die Konvergenz einer unendlichen Reihe $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots$, deren Glieder Elemente eines p-adischen*

*) Beide Fälle kommen wirklich vor, wie man sich unter Benutzung von Vielfachen des Einheitselements leicht überzeugt.

**) Jahresb. d. D. Math.-Ver., Bd. 16 (1907), 477.

oder g-adischen Systems S sind, ist die Bedingung: $\lim_{m=\infty} \alpha_m = o$.

Denn ist m so gewählt, daß α_m und alle folgenden Glieder kleiner als σ bleiben, so ist nach $\Pi_{12)}$ und Satz 3 auch jede aus diesen Gliedern gebildete Summe kleiner als σ. Für *gewöhnliche* Zahlen α_i ist jene Bedingung bekanntlich zur Konvergenz notwendig, aber *nicht* hinreichend.

Nunmehr zu den Gesetzen der Multiplikation übergehend, wobei sich die Darstellung wesentlich auf p-adische Systeme beschränken wird, sieht man sofort:

Satz 5: *Ein p-adisches System S enthält außer dem Nullelement o selbst keinen weiteren Teiler der Null.*

Es seien nämlich α und β zwei beliebige Elemente eines p-adischen Systems S, von denen $\beta \neq o$ sei; nach $\Gamma_{5)}$ enthält dann S sicher ein Element $\gamma < \beta$. Dann ist nach $\Pi_{11)}$ und Satz 1 stets $\alpha \cdot \gamma < \alpha \cdot \beta$, solange $\alpha \neq o$ ist; da es aber kein kleineres Element als o in S gibt, so folgt daher aus $\alpha \cdot \beta = o$ notwendig $\alpha = o$, w. z. b. w.. — Mit Hilfe der Körperpostulate $\Pi_{1)}$ bis $\Pi_{9)}$ und Satz 2 allein läßt sich Satz 5 nicht beweisen.

Aus Satz 5 folgt in Verbindung mit Satz 2 und den Postulaten $\Pi_{4)}$ bis $\Pi_{9)}$ (vgl. *Dickson*, a. a. O.):

Satz 6: *Jedes p-adische System S bildet einen Körper, der auch mit K(p) bezeichnet werden soll.*

Hiermit sind alle in einem Körper geltenden Gesetze, also z. B. auch das kommutative Gesetz der Addition, für jedes p-adische System als bewiesen anzusehen; insbesondere läßt sich eine *Division* mit dem Operationszeichen : definieren durch die Festsetzung $\alpha : \beta = \alpha \cdot \beta''$, wo α und $\beta \neq o$ beliebige Elemente aus $K(p)$ sind und β'' das durch $\Pi_{7)}$ geforderte und nach Satz 5 zu jedem $\beta \neq 0$ in $K(p)$ vorhandene, eindeutig bestimmte reziproke Element zu β ist.

Für ein p-adisches System folgt aus $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$ nach $\Pi_{11)}$ und Satz 1: $\alpha'' \cdot (\alpha \cdot \beta) < \alpha'' \cdot (\alpha \cdot \gamma)$*), wo α'' das reziproke Element zu α bedeutet, oder $\beta < \gamma$. In Rücksicht auf Satz 1 hat man daher die wichtige Erweiterung von $\Pi_{11)}$:

Satz 7: *Sind $\alpha \neq o, \beta, \gamma$ irgend drei Elemente eines p-adischen Systems, so folgt aus $\beta < \gamma$ stets $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$ und umgekehrt aus $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$*

*) Die Fälle $\alpha = o$ oder $\alpha \cdot \gamma = o$ brauchen nicht ausgeschlossen zu werden, weil für sie $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$ unmöglich ist.

stets $\beta < \gamma$. *Für* $\alpha \neq o$ *ist daher* $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$, $\alpha \cdot \beta \backsim \alpha \cdot \gamma$ *oder* $\alpha \cdot \beta > \alpha \cdot \gamma$, *je nachdem* $\beta < \gamma$, $\beta \backsim \gamma$ *oder* $\beta > \gamma$ *ist.*

Daß dieser weitgehende Satz nicht etwa auch in g-adischen Systemen gilt, zeigt folgendes Beispiel, für das $g = m^* n$ (m und n eigentliche Teiler) angenommen wird: Es ist

$$m\varepsilon \cdot n\varepsilon = m\varepsilon \cdot (\varepsilon + \varepsilon + \cdots + \varepsilon) = m\varepsilon + m\varepsilon + \cdots + m\varepsilon = (m \overset{*}{.} n)\,\varepsilon = g\varepsilon;$$

da $g\varepsilon < \varepsilon$, aber $m\varepsilon \backsim \varepsilon$ ist (vgl. die erste Fußnote auf S. 67), so gilt also $m\varepsilon \cdot n\varepsilon < m\varepsilon \cdot \varepsilon$, obgleich $n\varepsilon \backsim \varepsilon$ ist. In ähnlicher Weise überzeugt man sich, daß auch die erste Behauptung von Satz 7 für g-adische Systeme nicht allgemein zutrifft.

Da aus Satz 7 folgt, daß äquivalente Elemente, mit äquivalenten Elementen multipliziert, äquivalente Elemente ergeben, so ist hiermit für p-adische Systeme, nicht aber für g-adische, die Möglichkeit einer *Klassenmultiplikation**) erwiesen: statt zu sagen „multipliziert man in $K(p)$ ein beliebiges Element der Klasse C_i mit einem beliebigen Element der Klasse C_k, so erhält man als Produkt ein Element der durch C_i und C_k eindeutig bestimmten Klasse C_l", soll kurz $C_i \cdot C_k = C_l$ geschrieben werden. In Rücksicht auf $\Pi_{5)}$, $\Pi_{8)}$, $\Pi_{7)}$ und Satz 5 ist von vornherein klar, daß die so definierte Multiplikation assoziativ und kommutativ ist und eine eindeutige Umkehrung zuläßt mit Ausschluß der Division durch C_∞; ich schreibe: $C_l : C_i = C_k$. Da wegen Satz 5 das Produkt zweier von C_∞ verschiedener Klassen nie C_∞ sein kann, so folgt noch, daß *das System aller Klassen unter Ausschluß von* C_∞ *in bezug auf die definierte Multiplikation eine kommutative Gruppe bildet.*

Bezeichnen C_i und C_k irgend zwei von C_∞ verschiedene Klassen eines p-adischen Systems, so gilt nach Satz 7, da $C_{k+1} < C_k$ ist, $C_i \cdot C_{k+1} < C_i \cdot C_k$ oder, wenn $C_i \cdot C_k = C_l$ ist, $C_i \cdot C_{k+1} \leqq C_{l+1} < C_i \cdot C_k$. Es sei $C_{l+1} : C_i = C_m$; dann folgt aus der letzten Doppelungleichung nach Satz 7: $C_{k+1} \leqq C_m < C_k$. Da aber nach Definition von $C_{k+1} = C_k'$ (vgl. Postulat

*) Man erkennt deren Möglichkeit auch schon auf Grund dessen, daß sowohl sämtliche Elemente aus $K(p)$ unter Ausschluß des Nullelements wie auch alle Elemente der Einheitsklasse C_0, die das Einheitselement enthält, für sich in bezug auf die Multiplikation je eine *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{G}$ bezw. $\mathfrak{G}_0$ bilden; die oben im Text entwickelte Klassenmultiplikation ist nämlich nichts anderes als die *Multiplikation der Elemente der durch die invariante Untergruppe* $\mathfrak{G}_0$ *von* $\mathfrak{G}$ *bestimmten Quotientengruppe* $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}_0}$.

$I_{5)}$ auf S. 49) zwischen C_{k+1} und C_k keine Klasse liegen kann, so folgt $C_m = C_{k+1}$, d. h. aus der Relation $C_i \cdot C_k = C_l$ ergibt sich die andere $C_i \cdot C_{k+1} = C_{l+1}$. Das Zeichen $<$ mit $>$ und $+$ (in den Indizes) mit $-$ vertauschend, folgert man wörtlich ebenso, daß $C_i \cdot C_k = C_l$ stets $C_i \cdot C_{k-1} = C_{l-1}$ nach sich zieht.

Schon aus der Gruppeneigenschaft folgt, daß das System der Klassen eine Einheitsklasse enthält; man erkennt diese direkt in der Klasse, der das Einheitselement ε aus $K(p)$ angehört. Die in § 2 noch freigelassene Entscheidung, welche Klasse die Benennung C_0 führen soll, werde nun dahin getroffen, daß *die das Einheitselement ε von $K(p)$ enthaltende Einheitsklasse*, die vor den anderen Klassen dadurch ausgezeichnet ist, daß ihre Elemente eine Gruppe für die Multiplikation bilden, *stets mit C_0 bezeichnet werden soll*, so daß für jede*) Klasse C_i gilt: $C_i \cdot C_0 = C_i$.

Durch die letzte Beziehung sind mittels vollständiger Induktion auf Grund der beiden im vorletzten Absatz erhaltenen Resultate die Gesetze der Klassenmultiplikation vollkommen geregelt. Um diese bequem überblicken zu können, bezeichne ich für den Augenblick das Produkt $C_i \cdot C_k$ mit $C_{(i,k)}$; dann hat man die drei für alle von C_∞ verschiedenen Klassen C_i und C_k gültigen Regeln:

$$C_i \cdot C_0 = C_i, \quad C_i \cdot C_{k+1} = C_{(i,k)+1}, \quad C_i \cdot C_{k-1} = C_{(i,k)-1}.$$

Hier tritt auffallend die vollkommene Analogie mit den bekanntlich die Addition der ganzen Zahlen völlig festlegenden Definitionsgleichungen

$$i \overset{*}{+} 0 = i, \; i \overset{*}{+} (k \overset{*}{+} 1) = (i \overset{*}{+} k) \overset{*}{+} 1, \; i \overset{*}{+} (k \overset{*}{-} 1) = (i \overset{*}{+} k) \overset{*}{-} 1$$

hervor; man erkennt daher in bekannter Weise die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Satz 8: *Um irgend zwei Klassen eines p-adischen Systems, dessen Einheitsklasse mit C_0 bezeichnet ist, zu multiplizieren, addiere man ihre Indizes in gewöhnlicher Weise; die Summe gibt den Index der Produktklasse an.*

In Satz 8 hätte zunächst noch der Fall ausgenommen werden sollen, daß C_∞ eine der Faktorenklassen ist. Da $K(p)$ ein Körper ist, für dessen sämtliche Elemente α stets $\alpha \cdot o = o$ gilt, so folgt für jede Klasse C_i:

*) Der Zusatz „von C_∞ verschiedene" ist, wie sich sogleich zeigen wird, nicht nötig.

$C_i \cdot C_\infty = C_\infty$; nimmt man also für die gewöhnliche Addition noch die Regeln $\infty \overset{*}{+} i = k \overset{*}{+} \infty = \infty \overset{*}{+} \infty = \infty$ hinzu, so ist Satz 8 auch für diesen Fall gültig. Hier sei bemerkt, daß die Regel $\alpha \cdot o = o$ auch für g-adische Systeme allgemein gilt, da zu ihrem Beweis von der Existenz reziproker Elemente kein Gebrauch gemacht wird.

Man könnte nun, stets lediglich auf die eingeführten Postulate gestützt, eine große Zahl von Sätzen für die p-adischen und großenteils auch für die g-adischen Systeme nachweisen; da diese Sätze ähnlich aus den bisher bewiesenen fließen, wie dies in der Theorie der p-adischen *Zahlen* der Fall ist, so dürfte eine solche Weiterführung kein hinreichendes Interesse bieten.

Man überzeugt sich an Hand der genetischen Theorie der p-adischen Zahlen sehr leicht, daß alle in diesem Paragraphen eingeführten Postulate samt den aus ihnen gezogenen Folgerungen für die g-adischen bzw. für die p-adischen *Zahlen* wirklich erfüllt sind.

§ 4. Vollständige Bestimmung der Systeme p-adischer Zahlen. Die Näherungswerte.

Der Zweck der folgenden Erörterungen, die sich an die Resultate der §§ 2 und 3 nur mehr anhangsweise anschließen, ist, zum äußeren Abschluß des Ganzen den Nachweis zu führen, daß die durch drei weitere Postulate charakterisierten Spezialarten der in § 3 betrachteten p-adischen Systeme wesentlich *eindeutig* bestimmt und zwar mit den von Herrn *Hensel* auf genetischem Weg eingeführten Systemen der rationalen p-adischen Zahlen identisch sind.

Man sieht zunächst leicht, daß durch die Postulate $\Lambda_{2)}$ bis $\Lambda_{9)}$ des § 2 ein *Ordnungstypus* eindeutig festgelegt ist. Man betrachte nämlich für jede Klasse C (außer C_∞) die in $\Lambda_{5)}$ geforderte abzählbare Menge M unter Ausschluß des nach $\Lambda_{8)}$ ihr angehörigen Anfangselements sowie die aus den unmittelbaren Vorgängern der Elemente von M gebildete Menge, die nach $\Lambda_{5)}$ kein Element aus M enthält, in der Weise, daß man je zwei Elemente, von denen das eine unmittelbarer Vorgänger des andern ist, zu einem Elementenpaar zusammenfaßt; die Menge $\overline{M}$ aller solchen Elementenpaare ist nach $\Lambda_{5)}$ abzählbar, nach $\Lambda_{6)}$ überall dicht, besitzt also den Ordnungstypus η der rationalen Zahlen in ihrer natürlichen Reihen-

folge oder nach Hinzufügung der Endelemente α_C und ω_C den Typus $1+\eta+1$. Überdies ist die Menge $\overline{M}$ in der perfekten Menge aller Elemente der Klasse C überall (mit Ausnahme der durch $\overline{M}$ gekennzeichneten Sprungstellen) dicht enthalten. Der weitere Beweis wird nun genau entsprechend geführt wie der Beweis von Herrn *G. Cantor* für die eindeutige Bestimmtheit des Ordnungstypus θ des Kontinuums*); der einzige Unterschied, der zwar äußerliche Abweichungen, aber sachlich keinerlei Schwierigkeiten verursacht, liegt darin, daß Herr *Cantor* sich der Fundamentalreihen bedient, während hier im Anschluß an $\Lambda_{7)}$ mit Schnitten operiert werden muß**). Da auch durch die Postulate $I'_{1)}$ bis $I'_{7)}$ ein Ordnungstypus völlig festgelegt ist, so hat man:

Sind S und S' irgend zwei Systeme, deren jedes sämtliche Postulate $I'_{1)}$ bis $I'_{7)}$ und $\Lambda_{1)}$ bis $\Lambda_{9)}$ erfüllt, so sind S und S' einander sowohl in bezug auf die Größe wie auch in bezug auf die Höhe ähnlich, d. h. man kann ihre Elemente (und zwar auf unendlich mannigfache Weise) *umkehrbar eindeutig so aufeinander abbilden, daß, wenn α und β irgend zwei Elemente aus S, α' und β' die ihnen zugeordneten Elemente aus S' sind, aus $\alpha<\beta$ stets $\alpha'<\beta'$, aus $\alpha\backsim\beta$ stets $\alpha'\backsim\beta'$, aus $\alpha>\beta$ stets $\alpha'>\beta'$ und umgekehrt, insbesondere im Fall $\alpha\backsim\beta$ aus $\alpha<\beta$ stets $\alpha'<\beta'$, aus $\alpha>\beta$ stets $\alpha'>\beta'$ und umgekehrt folgt.* Zwei in solcher Weise einander zugeordnete Elemente α und α' sollen schlechthin *entsprechende Elemente* heißen.

Aus der am Schluß des vorigen Paragraphen eingeführten Klassenmultiplikation folgt auch noch, daß, wenn α und α' sowie β und β' entsprechende Elemente p-adischer Systeme bedeuten, die in der Grundzahl übereinstimmen und deren Einheitsklassen einander zugeordnet sind, auch die Produkte $\alpha\cdot\beta$ und $\alpha'\cdot\beta'$ einander wenigstens in bezug auf die Größe entsprechen. Doch schon der Nachweis, daß beide Produkte die nämliche *Höhe* besitzen, ist mit den bisherigen Mitteln nicht möglich.

Um diesen Nachweis und den entsprechenden für die Addition führen zu können, erweist sich daher die Einführung noch dreier weiterer Postulate $\Phi_{1)}$ bis $\Phi_{3)}$ als nötig. Der Grund für die größere Anzahl von

---

*) Math. Ann., Bd. 46 (1895), 511f.

**) Vgl. Herrn *Hilbert*s Verfahren in den Math. Ann., Bd. 56 (1903), 395.

Forderungen gegenüber der Theorie der reellen Zahlen liegt einerseits in den hier viel weniger einfachen Eigenschaften der Addition*), andererseits darin, daß die Anzahl der durch Postulate miteinander zu verknüpfenden Relationen und Operationen hier vier gegen drei in der Theorie der reellen Zahlen beträgt. Die folgenden Postulate sollen von vornherein nur auf p-adische Systeme S bezogen werden.

$\Phi_{1)}$. *Sind α und β irgend zwei äquivalente Elemente aus S und ist $\alpha < \beta$, so ist $p\alpha < p\beta$, wo p die Grundzahl von S bedeutet.*

$\Phi_{2)}$. *Bedeutet m eine unterhalb p gelegene natürliche Zahl, ε das Einheitselement aus S und sind α und β irgend zwei Elemente aus S, für die erstens $\beta \leqq \varepsilon$, zweitens $\alpha < \beta$ oder im Fall $\alpha \backsim \beta$ wenigstens $\alpha < \beta$ ist, so gilt, falls überhaupt $m\varepsilon + \alpha \backsim m\varepsilon + \beta$ ist, $m\varepsilon + \alpha < m\varepsilon + \beta$.*

$\Phi_{3)}$. *Ist α ein beliebiges Element der Einheitsklasse und ε das Einheitselement aus S, so gibt es stets eine nur von der Höhe des Elements α abhängige natürliche Zahl $m \overset{*}{<} p$ derart, daß $\alpha - m\varepsilon < \alpha$ wird und zwar die Größe und Höhe dieser Differenz nur von der Höhe des Elements α abhängt.*

Die weitere Fortführung der Untersuchung auf Grund dieser Postulate, die sich etwas einförmig gestaltet und dabei keinerlei Schwierigkeiten bietet, soll hier nicht mehr ausgeführt, sondern nur ihrem Gedankengang nach angedeutet werden. Man betrachte zunächst alle Quotienten der Form $\varepsilon : p^n\varepsilon$ aus $K(p)$, wo n eine beliebige natürliche Zahl darstellt; sie und ihre Vielfachen mögen die *rationalen Vielfachen von ε* heißen. Man erkennt dann leicht aus den Definitionen der Vielfachen, daß die Summe bzw. das Produkt zweier Vielfachen von ε einfach durch eine *im gewöhnlichen Sinn* auszuführende Addition bzw. Multiplikation gefunden wird.

Nach dieser Vorbereitung lassen sich im Anschluß an $\Phi_{3)}$ für ein Element beliebiger Größe aus S die *Näherungswerte der verschiedenen Ordnungen* einführen, deren Bedeutung darin liegt, daß sie, obgleich nur rationale Vielfache des Einheitselements, also Elemente sehr spezieller Bildung, dennoch den zugehörigen allgemeinen Elementen aus $K(p)$ mit jeder gewünschten Genauigkeit nahekommen, so daß die Differenz zwischen einem beliebigen Element aus $K(p)$ und einem Näherungswert genügend hoher

*) Vgl. hierzu einige Bemerkungen des Herrn *Perron*, Jahresb. d. D. Math.-Ver., Bd. 16 (1907), 147 u. 150.

Ordnung beliebig klein wird. Aus $\Phi_{3)}$ folgt dann noch, daß die Näherungswerte eines Elements nur von dessen Größe und Höhe abhängen.

Da die Näherungswerte rationale Vielfache von ε sind, die Summen und Produkte übereinstimmender Näherungswerte also in allen p-adischen Systemen stets wieder die gleichen rationalen Vielfachen von ε sind, weil sie auf rationalem Wege, d. h. unabhängig von der besonderen Beschaffenheit des Systems S gefunden werden, so wird der gewünschte Beweis der eindeutigen Bestimmtheit von Addition und Multiplikation wenigstens für die Näherungswerte geführt sein, sobald gezeigt ist, daß in irgend welchen alle Postulate befriedigenden p-adischen Systemen mit dem nämlichen Werte p die gleichen rationalen Vielfachen von ε auch gleiche Größe und Höhe besitzen, d. h. daß sie *zugleich* entweder größer oder kleiner oder äquivalent und höher oder niedriger als andere einander in bezug auf Größe und Höhe entsprechende Elemente sind. Dieser Nachweis läßt sich in bezug auf die *Größe* bereits mit den Mitteln des vorigen Paragraphen führen, da nach Postulat $\Pi_{12)}$ und den Sätzen 1 und 8 unschwer zu ermitteln ist, welcher Klasse ein gegebenes Vielfaches von ε angehört. Ebenso leicht aber beweist man mit Hilfe der Postulate $\Phi_{1)}$ bis $\Phi_{3)}$, daß für ein Vielfaches von ε auch die *Höhe* durch seinen rationalen Multiplikator völlig bestimmt ist: aus $\Phi_{3)}$ und $\Phi_{2)}$ folgt nämlich, daß ε das Anfangselement von C_0 und $\varepsilon < 2\varepsilon < 3\varepsilon < \cdots < (p \stackrel{*}{-} 1)\varepsilon$ ist, $\Phi_{2)}$ ergibt die Höhenordnung aller anderen in C_0 enthaltenen Vielfachen von ε und das umkehrbare Postulat $\Phi_{1)}$ erlaubt die Ausdehnung dieser Resultate auf alle anderen Klassen.

Nunmehr betrachte man ganz allgemein zwei Systeme S und S', die sämtliche Postulate erfüllen, und denke sich bereits die ihrer Größe und Höhe nach entsprechenden Elemente einander zugeordnet und zwar derart, daß die Einheitsklassen beider Systeme einander entsprechen. Da, wie sich auf Grund einer sehr einfachen Überlegung ergibt, die Summe bzw. das Produkt der Näherungswerte zweier Elemente auch Näherungswert von deren Summe bzw. Produkt ist, so beweist man mittels Approximation durch Näherungswerte ohne weiteres zunächst, daß die Summen entsprechender Elemente gleichnumerierten Klassen angehören, und schließlich, daß die Summen und Produkte entsprechender Elemente, falls sie einander der Größe nach entsprechen, auch entweder zugleich höher oder

zugleich niedriger als zwei andere einander entsprechende Elemente der nämlichen Klassen sind. Hiermit ist folgender Satz vollkommen erwiesen, mit dem diese Darstellung ihren Abschluß finden möge:

Hat man zwei Systeme, deren jedes sämtlichen Postulaten $I_{1)}$ bis $I_{7)}$, $\Lambda_{1)}$ bis $\Lambda_{9)}$, $\Pi_{1)}$ bis $\Pi_{12)}$ und $\Phi_{1)}$ bis $\Phi_{3)}$ genügt und für welche die Zahl p in $\Pi_{10)}$ die nämliche Primzahl bedeutet, und sind, wie dies immer ausführbar ist, die Elemente beider Systeme einander umkehrbar eindeutig so zugeordnet, daß größere Elemente größeren, kleinere kleineren und von äquivalenten höhere höheren, niedrigere niedrigeren entsprechen und insbesondere die Einheitsklassen beider Systeme einander zugeordnet sind, so sind die Summen und die Produkte entsprechender Elemente ebenfalls entsprechende Elemente, das System ist also vollkommen eindeutig festgelegt). Da das System von Hensels rationalen p-adischen Zahlen sämtliche Postulate erfüllt, so lassen sich bei übereinstimmendem p alle Systeme S ähnlich in bezug auf Größe und Höhe und isomorph in bezug auf Addition und Multiplikation auf das System der rationalen p-adischen Zahlen abbilden.*

---

*) Ein System von Postulaten, das einen Bereich von Elementen in diesem Sinn eindeutig festlegt, mag nach der zuerst von Herrn *O. Veblen* benutzten (Trans. of the Am. Math. Soc., vol. 5 [1904], 346) und seither in Amerika üblich gewordenen Bezeichnung „categorical set of postulates" ein *kategorisches Postulatensystem* heißen.

Über eine von Herrn *H. A. Schwarz* angegebene Funktion.

Von Herrn *R. Remak* in Berlin.

Einleitung.

In seiner Arbeit: „Sur les fonctions dérivées“*) behandelt Herr *Pompeiu* eine Funktion, die nicht konstant ist, deren Ableitung aber an einer dichten Menge von Stellen in einem Intervall verschwindet. Gestützt auf Sätze des Herrn *Baire***) kommt er zu dem Resultat, daß außer der abzählbaren Menge von Nullstellen, die sich aus der Bildung der Funktion unmittelbar ergeben, die Ableitung noch eine zweite nicht abzählbare Menge von Nullstellen besitzen muß.

Der Gedankengang ist etwa folgender: Herr *Baire* beweist***), daß die Ableitung einer differenzierbaren Funktion mindestens eine überall dichte Menge von Stetigkeitsstellen besitzen muß. Er bezeichnet ferner alle Punktmengen in einem Intervall, die als die Vereinigungsmenge von abzählbar unendlich vielen nirgends dichten Mengen dargestellt werden können, als Punktmengen erster Kategorie†). (Alle Punktmengen, für die keine solche Darstellung möglich ist, gehören zur zweiten Kategorie.) Liegen die Stetigkeitsstellen einer Funktion überall dicht, so erweist sich ihre Komplementärmenge als Menge erster Kategorie. Eine Komplemen-

*) Math. Annalen, Bd. 63 (1907), S. 326.

**) Leçons sur les fonctions discontinues par *René Baire*, Paris 1905.

***) a. a. O., S. 80—83.

†) a. a. O., S. 78.

tärmenge einer Menge erster Kategorie hat aber die Mächtigkeit des Kontinuums*). Liegen also die Stetigkeitsstellen einer Funktion überall dicht, so hat ihre Menge die Mächtigkeit des Kontinuums. Das gilt insbesondere von allen Ableitungen.

Wenn die Nullstellen der Ableitung einer Funktion dicht liegen, so ist die Ableitung sicher unstetig an jeder Stelle, an der sie nicht Null ist, da in beliebiger Nähe einer solchen Stelle Nullstellen liegen. Die Stetigkeitsstellen, deren Menge S sei, sind also nur unter den Nullstellen zu suchen, deren Menge N sei. Es ist, wenn E die Menge aller Punkte eines Intervalls ist,

$$E > N > S \text{ und } E \sim S,$$

$$\text{also } E \sim N^{**}).$$

Die Ausführungen des Herrn *Pompeiu* liefern also den allgemeinen Satz:

„Liegen die Nullstellen der Ableitung einer Funktion überall dicht, so ist ihre Mächtigkeit gleich der des Kontinuums."

Später hat Herr *H. A. Schwarz****) ein weiteres Beispiel einer derartigen Funktion veröffentlicht, das er im Mai 1875 *P. du Bois-Reymond* brieflich mitgeteilt hat. Die wesentlich speziellere Funktion des Herrn *Schwarz* gestattet nun, ohne Benutzung der Sätze des Herrn *Baire*, Nullstellen der Ableitung von der zweiten beschriebenen Art direkt anzugeben und zu zeigen, daß ihre Menge dem Kontinuum äquivalent ist.

Die Funktion des Herrn *Schwarz* entsteht folgendermaßen. Es sei

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}}.$$

Der Kubikwurzel wird stets ihr reeller Wert beigelegt. $\varphi(x)$ ist für alle reellen x endlich, stetig, eindeutig und wächst beständig mit x.

Bezeichnet man das bestimmte Integral

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} \text{ mit } A,$$

*) *Schoenflies*, die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten (Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 8, 1900), S. 108.

**) Äquivalenzsatz des Herrn *F. Bernstein*, veröffentlicht in *Borel*, Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898, S. 103.

***) Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad., Berlin, 1910, Stück XXXII, S. 592.

ferner die größte ganze Zahl $\leqq x$ mit $[x]$, die kleinste ganze Zahl $\geqq x$ mit $\mathfrak{G}[x]$, so daß also $\mathfrak{G}[x] = [x] + 1$, wenn x nicht ganzzahlig, $x = [x] = \mathfrak{G}[x]$, wenn x ganzzahlig, so ist

$$\varphi(x\pi) = \int_0^{x\pi} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} \geqq \int_0^{[x]\cdot\pi} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} = [x]\cdot A > (x-1)A$$

$$\varphi(x\pi) = \int_0^{x\pi} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} \leqq \int_0^{\mathfrak{G}[x]\,\pi} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} = \mathfrak{G}[x]\cdot A < (x+1)A.$$

Herr *Schwarz* bildet mit Hilfe der Funktion $\varphi(x)$

$$\xi = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x\pi)}{2^{mn}}.$$

Es ist also

$$F(x) > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(2^n x - 1)}{2^{mn}} = A\left(x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(m-1)n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{mn}}\right).$$

Die Reihe $F(x)$ divergiert daher stets, sobald $m \leqq 1$. Da

$$F(x) < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(2^n x + 1)}{2^{mn}} = A\left(x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(m-1)n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{mn}}\right),$$

konvergiert die Reihe $F(x)$ stets, sobald $m > 1$. Ich setze also für das Folgende stets

$$m > 1$$

voraus.

Wollte man $F(x)$ gliedweise nach x differenzieren, so würde man erhalten

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \pi \frac{\varphi'(2^n \pi x)}{2^{mn}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2^{(m-1)n} \cdot (\sin(2^n x \cdot \pi))^{\frac{2}{3}}}.$$

Ich will in § 1 dieser Arbeit zeigen, daß überall, wo $S(x)$ konvergiert,

$$\frac{dF(x)}{dx} = S(x)$$

ist, daß ferner überall, wo $S(x)$ divergiert,

$$\lim_{\substack{h_1=0 \\ h_2=0}} \frac{F(x+h_1) - F(x-h_2)}{h_1 + h_2} = +\infty$$

ist (es seien dabei stets $h_1 \geqq 0$ und $h_2 \geqq 0$). Da $S(x)$ eine Reihe von lauter positiven Gliedern ist, so muß es entweder konvergieren oder bestimmt unendlich werden. Läßt man für $S(x)$ sowohl wie für $\frac{dF(x)}{dx}$ den Wert $+\infty$ zu, so ist die Gleichung

$$\frac{dF(x)}{dx} = S(x)$$

für alle x zu beweisen.

In § 2 werde ich zeigen, daß $S(x)$ gleichzeitig mit einer einfacheren unendlichen Reihe $U(x)$ konvergiert und divergiert.

In § 3 gebe ich Beispiele der Konvergenz und Divergenz von $U(x)$ an und zeige, daß sowohl die Menge der x, für die $U(x)$ konvergiert, als auch die Menge der x, für die $U(x)$ divergiert, dem Kontinuum äquivalent ist.

In § 4 endlich gehe ich, entsprechend wie Herr *Schwarz* dies tut, zur Umkehrungsfunktion von $F(x)$ über.

§ 1.

Wenn

$$x = \frac{p}{2^q}$$

ist, wo p eine ungerade, q irgendeine ganze Zahl, so ist für $n \geqq q$

$$\sin(2^n x\pi) = \sin(2^{n-q} \cdot p \cdot \pi) = 0.$$

Alle Glieder von $S(x)$ vom $(q+1)$-ten ab werden einzeln unendlich. Es ist also zu zeigen, daß, wenn $x = \frac{p}{2^q}$,

$$\lim_{\substack{h_1=0 \\ h_2=0}} \frac{F(x+h_1) - F(x-h_2)}{h_1 + h_2} = +\infty$$

wird.

Es ist

$$\frac{F(x+h_1) - F(x-h_2)}{h_1+h_2} = \sum_{n=0}^{q-1} \left\{ \frac{1}{2^{mn}(h_1+h_2)} \int_{2^n(x-h_2)\pi}^{2^n(x+h_1)\pi} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} \right\} + \sum_{n=q}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^{mn}(h_1+h_2)} \int_{-2^n h_2 \pi}^{+2^n h_1 \pi} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} \right\}.$$

Die beiden unendlichen Reihen $F(x+h_1)$ und $F(x-h_2)$ sind hier gliedweise subtrahiert und die beiden Integrale in jedem Gliede zu einem einzigen vereinigt worden. In der zweiten Summe ist außerdem von den Integrationsgrenzen $2^n x\pi$ subtrahiert worden, ein ganzzahliges Vielfaches von π, wodurch die Integrale wegen der Periodizität von $(\sin x)^{\frac{2}{3}}$ nicht geändert werden. Führt man die Bezeichnung ein:

$$\sum_{n=0}^{r} \frac{\pi}{2^{(m-1)n}(\sin(2^n x\pi))^{\frac{2}{3}}} = S_r(x),$$

so wird, da man eine endliche Summe gliedweise differenzieren darf, die erste Summe, in die der Differenzenquotient von $F(x)$ zerlegt ist, gleich

$$S_{q-1}\left(\frac{p}{2^q}\right)+\eta,$$

worin nach Annahme eines beliebig kleinen $\varepsilon>0$

$$|\eta|<\varepsilon$$

gemacht werden kann, dadurch daß man $\delta>0$ hinreichend klein bestimmt und $h_1<\delta$, $h_2<\delta$ setzt.

Es ist also

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h_1)-F(x-h_2)}{h_1+h_2} &> S_{q-1}\left(\frac{p}{2^q}\right)-\varepsilon+\sum_{n=q}^{\infty}\left\{\frac{1}{2^{mn}(h_1+h_2)}\int_{-2^n h_2\pi}^{2^n h_1\pi}\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}\right\}\\ &= S_{q-1}\left(\frac{p}{2^q}\right)-\varepsilon+\sum_{n=q}^{\infty}\frac{3\left(h_1^{\frac{1}{3}}+h_2^{\frac{1}{3}}\right)\cdot 2^{\frac{n}{3}}\cdot\pi^{\frac{1}{3}}}{2^{mn}\left\{\left(h_1^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(h_2^{\frac{1}{3}}\right)^3\right\}}\\ &= S_{q-1}\left(\frac{p}{2^q}\right)-\varepsilon+\sum_{n=q}^{\infty}\frac{3\cdot\pi^{\frac{1}{3}}}{2^{(m-\frac{1}{3})n}}\cdot\frac{1}{h_1^{\frac{2}{3}}-h_1^{\frac{1}{3}}h_2^{\frac{1}{3}}+h_2^{\frac{2}{3}}}.\end{aligned}$$

Es ist $S_{q-1}\left(\frac{p}{2^q}\right)$ bei festem p und q eine feste Zahl; ε kann beliebig klein gemacht werden. Die letzte Summe wächst mit abnehmendem h_1 und h_2 über alle Grenzen. Um das zu zeigen, setze man

$$h_1^{\frac{1}{3}}=k_1,\ h_2^{\frac{1}{3}}=k_2,\ \text{dann ist}$$

$$k_1^2-k_1k_2+k_2^2=\frac{3(k_1-k_2)^2+(k_1+k_2)^2}{4}>0,$$

so lange $k_1+k_2>0$. Andrerseits ist

$$k_1^2-k_1k_2+k_2^2<(k_1+k_2)^2.$$

Es sei $h_1<\delta$ und $h_2<\delta$, dann ist

$$\frac{1}{k_1^2-k_1k_2+k_2^2}>\frac{1}{(k_1+k_2)^2}>\frac{1}{(2\,\delta^{\frac{1}{3}})^2}=\frac{1}{4\,\delta^{\frac{2}{3}}}.$$

Also wächst der Differenzenquotient von $F(x)$ mit abnehmendem h_1 und h_2 tatsächlich über alle Grenzen.

Ich nehme zweitens an, die Reihe $S(x)$ divergiere, ohne daß die einzelnen Glieder unendlich werden. Es ist zu zeigen, daß nach Annahme einer beliebig großen positiven Zahl M

$$\frac{F(x+h_1)-F(x-h_2)}{h_1+h_2}>M$$

wird, sobald $h_1<\delta$, $h_2<\delta$, wo $\delta>0$ eine zu bestimmende hinreichend kleine Zahl. Es werde die Bezeichnung eingeführt

$$\sum_{n=0}^{r} \frac{\varphi(2^n x\pi)}{2^{mn}} = F_r(x).$$

Dann ist

$$\frac{dF_n(x)}{dx} = S_n(x),$$

weil eine endliche Summe gliedweise differenziert werden darf.

Man bestimme zunächst N so groß, daß

$$S_N(x) > M + \varepsilon$$

wird, was wegen der Divergenz der Reihe $S(x)$ möglich ist. $\varepsilon > 0$ ist eine beliebig kleine fest gewählte Zahl.

Nun bestimme man δ so, daß, wenn

$$\frac{F_N(x+h_1) - F_N(x-h_2)}{h_1+h_2} = S_N(x) + \eta$$

gesetzt wird,

$$|\eta| < \varepsilon$$

ausfällt, sobald $h_1 < \delta$ und $h_2 < \delta$.

Es wachsen alle Glieder der Reihe $F(x)$ mit x monoton, also wächst auch der Rest $F(x) - F_n(x)$ monoton, hat also einen positiven Differenzenquotienten. Also ist

$$\frac{F(x+h_1)-F(x-h_2)}{h_1+h_2} > \frac{F_N(x+h_1)-F_N(x-h_2)}{h_1+h_2}$$
$$= S_N(x) + \eta > S_N(x) - \varepsilon > (M+\varepsilon) - \varepsilon = M.$$

Wenn also

$$S(x) = +\infty,$$

so ist auch

$$\lim_{\substack{h_1=0\\h_2=0}} \frac{F(x+h_1)-F(x-h_2)}{h_1+h_2} = +\infty.$$

Um drittens zu zeigen, daß

$$\frac{dF(x)}{dx} = S(x)$$

ist für alle x, für die die Reihe $S(x)$ konvergiert, beweise ich den Hilfssatz: „Der Differenzenquotient der Funktion $\varphi(x)$ ist für beliebige positive h_1 und h_2 kleiner als der 14-fache Differentialquotient für dasselbe Argument, d. h.

$$\frac{\varphi(x+h_1)-\varphi(x-h_2)}{h_1+h_2} < 14\varphi'(x) \quad \text{oder}$$

$$\frac{1}{h_1+h_2}\left\{\int_0^{x+h_1} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} - \int_0^{x-h_2} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}}\right\} = \frac{1}{h_1+h_2}\int_{x-h_2}^{x+h_1} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} < \frac{14}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}}.“$$

Es soll zuerst $\sin x$ zwischen Grenzen eingeschlossen werden. Es genügt, den angegebenen Satz zu beweisen für das Intervall

$$0 < x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Für dieses Intervall erhält man unter Benutzung der Potenzreihenentwicklung für $\sin x$:

$$x > \sin x > x - \frac{x^3}{6} \geqq x\left(1 - \frac{\pi^2}{2^2 \cdot 6}\right) > x\left(1 - \frac{10}{24}\right) = x \cdot \frac{7}{12},$$

also

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \frac{7}{12}.$$

Im Intervall $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ nimmt $\sin x$ ab, x wächst, also nimmt $\frac{\sin x}{x}$ ab. Für das Intervall

$$\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{5}{6}\pi \text{ ist daher}$$

$$\frac{\sin x}{x} \geqq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{6}\pi} = \frac{3}{5\pi} > \frac{3}{16}.$$

Die Ungleichheitsbedingung

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{3}{16}$$

gilt also für das ganze Intervall $0 < x \leqq \frac{5}{6}\pi$.

Es sei $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$. Zunächst werde

$$h_1 + h_2 \leqq \frac{\pi}{3}$$

angenommen. Dann ist

$$x + h_1 \leqq x + h_1 + h_2 \leqq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi,$$

$$x - h_2 \geqq x - h_1 - h_2 > 0 - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3},$$

$$x - h_2 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},$$

also

$$|x - h_2| \leqq \frac{\pi}{2} < \frac{5}{6}\pi.$$

Unter diesen Beschränkungen wird

$$\frac{1}{h_1 + h_2} \int_{x-h_2}^{x+h_1} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} < \frac{1}{h_1 + h_2} \int_{x-h_2}^{x+h_1} \frac{dx}{\left(\frac{3}{16}x\right)^{\frac{2}{3}}} = 3 \cdot \left(\frac{16}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{(x + h_1)^{\frac{1}{3}} - (x - h_2)^{\frac{1}{3}}}{h_1 + h_2}.$$

Es ist aber

$$3\cdot\left(\frac{16}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = 3\cdot\left(\frac{2^8}{3^2}\right)^{\frac{1}{3}} = (3\cdot 2^8)^{\frac{1}{3}} = 768^{\frac{1}{3}} < 1000^{\frac{1}{3}} = 10.$$

Also ist

$$\frac{1}{h_1+h_2}\int_{x-h_2}^{x+h_1}\frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} < 10\,\frac{(x+h_1)^{\frac{1}{3}}-(x-h_2)^{\frac{1}{3}}}{((x+h_1)^{\frac{1}{3}})^3-((x-h_2)^{\frac{1}{3}})^3}$$

$$= \frac{10}{(x+h_1)^{\frac{2}{3}}+(x+h_1)^{\frac{1}{3}}(x-h_2)^{\frac{1}{3}}+(x-h_2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{10}{\frac{3}{4}\cdot(x+h_1)^{\frac{2}{3}}+\left\{\frac{1}{2}(x+h_1)^{\frac{1}{3}}+(x-h_2)^{\frac{1}{3}}\right\}^2}$$

$$\leqq \frac{10}{\frac{3}{4}(x+h_1)^{\frac{2}{3}}} \leqq \frac{40}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} < \frac{14}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}}.$$

Es sei zweitens

$$\frac{\pi}{3} \leqq h_1+h_2 \leqq \pi.$$

Es war

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} = A.$$

Es ist aber auch

$$\int_x^{x+\pi}\frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} = A$$

wegen der Periodizität von $(\sin x)^{\frac{2}{3}}$. Für das angegebene Intervall für h_1+h_2 erhält man

$$\frac{1}{h_1+h_2}\int_{x-h_2}^{x+h_1}\frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} \leqq \frac{1}{h_1+h_2}\int_{x-h_2}^{x-h_2+\pi}\frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1}{h_1+h_2}\cdot A \leqq \frac{3}{\pi}A < A.$$

Es sei schließlich

$$h_1+h_2 \geqq \pi.$$

Dann ist

$$\frac{1}{h_1+h_2}\int_{x-h_2}^{x+h_1}\frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} \leqq \frac{1}{h_1+h_2}\int_{x-h_2}^{x-h_2+\pi\cdot\mathfrak{G}\left[\frac{h_1+h_2}{\pi}\right]}\frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1}{h_1+h_2}\cdot\mathfrak{G}\left[\frac{h_1+h_2}{\pi}\right]\cdot A < \frac{1}{h_1+h_2}\left(\frac{h_1+h_2}{\pi}+1\right)\cdot A$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{h_1+h_2}\right)\cdot A \leqq \frac{2}{\pi}\cdot A < A.$$

Die Ungleichheitsbedingung

$$\frac{1}{h_1+h_2}\int_{x-h_2}^{x+h_1}\frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} < A$$

ist also erfüllt, sobald $h_1 + h_2 \geqq \frac{\pi}{3}$.

Es soll nun A abgeschätzt werden:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}}.$$

Ersetzt man im zweiten Integral x durch $\pi - x$, vertauscht man die Grenzen und ersetzt das negative Vorzeichen von dx durch das positive, so erhält man

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} < 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(\frac{7}{12}x\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{12}{7}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}}{7^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$$

$$= 12 \cdot \left(\frac{9\pi}{49}\right)^{\frac{1}{3}} < 12\left(\frac{30}{49}\right)^{\frac{1}{3}} < 12.$$

Also ist, sobald $h_1 + h_2 \geqq \frac{\pi}{3}$,

$$\frac{1}{h_1 + h_2} \int_{x-h_2}^{x+h_1} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} < 12 \leqq \frac{12}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} < \frac{14}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}}.$$

Es war aber für $0 < h_1 + h_2 \leqq \frac{\pi}{3}$ das Bestehen der Ungleichheitsbedingung

$$\frac{1}{h_1 + h_2} \int_{x-h_1}^{x+h_1} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} < \frac{14}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}}$$

bereits bewiesen. Der Hilfssatz gilt also allgemein.

Es soll nun gezeigt werden, daß, wenn für einen bestimmten Wert von x die Reihe $S(x)$ konvergiert,

$$\lim_{\substack{h_1=0 \\ h_2=0}} \frac{F(x+h_1) - F(x-h_2)}{h_1 + h_2} = S(x)$$

ist. Es sei eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$ vorgegeben und es soll $\delta > 0$ hinreichend klein so bestimmt werden, daß, wenn $h_1 < \delta$ und $h_2 < \delta$,

$$\left| \frac{F(x+h_1) - F(x-h_2)}{h_1 + h_2} - S(x) \right| < \varepsilon$$

wird. Man bestimme zunächst N so groß, daß

$$S(x) - S_N(x) < \frac{\varepsilon}{30}$$

wird, was wegen der Konvergenz der Reihe $S(x)$ möglich ist. Die letzte Ungleichheitsbedingung kann man schreiben:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\pi}{2^{(m-1)n}(\sin(2^n x\pi))^{\frac{2}{3}}} < \frac{\varepsilon}{30}.$$

Es ist für jedes beliebige h_1 und h_2

$$\frac{F(x+h_1)-F(x-h_2)}{h_1+h_2} - \frac{F_N(x+h_1)-F_N(x-h_2)}{h_1+h_2}$$

$$= \frac{1}{h_1+h_2} \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^{mn}} \int_{2^n(x-h_2)\pi}^{2^n(x+h_1)\pi} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} \right\}$$

$$< \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{14\pi}{\sin(2^n x\pi)^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{(m-1)n}} < \frac{14\varepsilon}{30}.$$

Die vorstehende Summe über Integrale denke man sich im Zähler und Nenner mit $2^n \cdot \pi$ multipliziert. Das allgemeine Glied ist dann $2^n \cdot \pi$ multipliziert mit einem Differenzenquotienten mit dem Argumente $2^n x\pi$, in dem an die Stelle von h_1 und h_2 bzw. $2^n \cdot h_1 \cdot \pi$ und $2^n \cdot h_2 \cdot \pi$ getreten sind. Auf diesen Differenzenquotienten ist der Hilfssatz angewendet worden.

Es ist

$$\frac{dF_N(x)}{dx} = S_N(x).$$

Unter Festhaltung von N bestimme man $\delta > 0$ hinreichend klein, so daß, wenn $h_1 < \delta$, $h_2 < \delta$

$$\left| \frac{F_N(x+h_1)-F_N(x-h_2)}{h_1+h_2} - S_N(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Es ist

$$\left| \frac{F(x+h_1)-F(x-h_2)}{h_1+h_2} - S(x) \right|$$

$$= \left| \left(\frac{F_N(x+h_1)-F_N(x-h_2)}{h_1+h_2} - S_N(x) \right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{F(x+h_1)-F(x-h_2)}{h_1+h_2} - \frac{F_N(x+h_1)-F_N(x-h_2)}{h_1+h_2} \right) - (S(x) - S_N(x)) \right|$$

$$\leq \left| \frac{F_N(x+h_1)-F_N(x-h_2)}{h_1+h_2} - S_N(x) \right|$$

$$+ \left| \frac{F(x+h_1)-F(x-h_2)}{h_1+h_2} - \frac{F_N(x+h_1)-F_N(x-h_2)}{h_1+h_2} \right| + |S(x) - S_N(x)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{14\varepsilon}{30} + \frac{\varepsilon}{30} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit ist die Existenz des Differentialquotienten von $F(x)$ nachgewiesen für alle x, für die die Reihe $S(x)$ konvergiert. Die Gleichung

$$\frac{dF(x)}{dx} = S(x)$$

gilt also allgemein in dem erläuterten Sinne.

§ 2.

Es bleibt zu zeigen, daß sowohl Stellen der Konvergenz der Reihe $S(x)$ als auch der Divergenz existieren, in denen nicht Glieder einzeln unendlich werden. Zu dem Zwecke möge x in einen dyadischen Bruch entwickelt werden. Der Fall der abbrechenden dyadischen Brüche oder der dyadischen Brüche, die mit unendlich vielen Einsen endigen, die den abbrechenden gleich sind, ist bereits erledigt. Ich nehme also an, x sei in einen dyadischen Bruch entwickelt, in dem hinter jeder Null einmal wieder eine Eins folgt und umgekehrt. Es war $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqq x$, also die Zahl, die aus x durch Fortlassung aller Stellen hinter dem Komma entsteht. Es sei

$$\Re[x] = x - [x],$$

also diejenige Zahl, die aus x entsteht, wenn man die ganze Zahl vor dem Komma durch 0 ersetzt. $\mathfrak{A}[x]$ sei der absolut genommene, absolut kleinste Rest von x nach 1. Es ist also

$$\mathfrak{A}[x] = \Re[x],$$

solange $\Re[x] < \frac{1}{2}$,

$$\mathfrak{A}[x] = 1 - \Re[x],$$

wenn $\Re[x] > \frac{1}{2}$. Es ist also immer

$$0 < \mathfrak{A}[x] < \frac{1}{2}.$$

Addiert man zu irgendeiner mit 0,... beginnenden nicht abbrechenden dyadischen Zahl diejenige Zahl, die aus ihr durch Ersatz von 1 durch 0 und von 0 durch 1 an allen Stellen hinter dem Komma entsteht, so erhält man

$$0{,}111\ldots \text{ in infinitum } = 1.$$

Es ist also entweder $\mathfrak{A}[x] = \Re[x]$, wenn $\Re[x]$ mit 0,0 beginnt, oder es entsteht $\mathfrak{A}[x]$ aus $\Re[x]$ durch Ersatz von 1 durch 0 und von 0 durch 1 an allen Stellen hinter dem Komma, wenn $\Re[x]$ mit 0,1 beginnt. $\mathfrak{A}[x]$ beginnt also in jedem Falle mit 0,0. Es sei $\lambda(0)$ die Anzahl der gleich-

lautenden Ziffern (Nullen oder Einsen), die in x unmittelbar hinter dem Komma stehen. Es ist $\lambda(0) \geqq 1$. $\mathfrak{A}[x]$ beginnt mit $0,\ldots$ und genau $\lambda(0)$ Nullen hinter dem Komma. Die $(\lambda(0)+1)$-te Stelle hinter dem Komma ist die erste Eins. Es gilt also die Ungleichheitsbedingung

$$2^{-\lambda(0)} > \mathfrak{A}[x] > 2^{-(\lambda(0)+1)}.$$

Es bezeichne $\lambda(n)$ die Anzahl der gleichlautenden Ziffern unmittelbar hinter dem Komma in $2^n \cdot x$ oder, was dasselbe bedeutet, die Anzahl der gleichlautenden Ziffern, die in dem dyadischen Bruch für x unmittelbar auf die n-te Stelle hinter dem Komma folgen. Es ist also auch

$$2^{-\lambda(n)} > \mathfrak{A}[2^n \cdot x] > 2^{-(\lambda(n)+1)}.$$

Diese Ungleichheitsbeziehung soll zur Abschätzung der Reihe $S(x)$ nach oben und nach unten verwandt werden.

Es ist

$$(\sin(x\pi))^{\frac{2}{3}} = (\sin(x\pi - [x]\cdot\pi))^{\frac{2}{3}} = (\sin(\mathfrak{R}[x]\cdot\pi))^{\frac{2}{3}} = (\sin(\mathfrak{A}[x]\cdot\pi))^{\frac{2}{3}}.$$

Das setze man ein:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2^{(m-1)n}(\sin(\mathfrak{A}[2^n\cdot x]\cdot\pi))^{\frac{2}{3}}}.$$

Es werde zunächst $S(x)$ nach unten hin abgeschätzt:

$$S(x) > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2^{(m-1)n}(\mathfrak{A}[2^n\cdot x]\cdot\pi)^{\frac{2}{3}}} > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{2^{(m-1)n}\cdot 2^{-\frac{2}{3}\cdot\lambda(n)}}$$

$$= \pi^{\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{2}{3}\lambda(n)-(m-1)n} = \pi^{\frac{1}{3}}\cdot T(x).$$

Bezeichnet man mit $n_0 = 0,\ n_1, n_2, \ldots$ (in infinitum) die Ordnungszahlen derjenigen dyadischen Stellen von x hinter dem Komma, hinter denen unmittelbar ein Ziffernwechsel stattfindet, so daß also $\mathfrak{A}[x]$ sich mit lauter Nullen schreibt bis einschließlich zur n_1-ten Stelle, dann mit lauter Einsen bis zur n_2-ten Stelle einschließlich, dann mit lauter Nullen bis zur n_3-ten Stelle einschließlich, usw., so wird $\pi^{\frac{1}{3}} T(x)$ weiter verkleinert, wenn man anstatt aller n nur die $n_0, n_1, n_2, \ldots$ berücksichtigt. Es ist ferner

$$\lambda(n_\varrho) = n_{\varrho+1} - n_\varrho,$$

also

$$S(x) > \pi^{\frac{1}{3}} T(x) \geqq \pi^{\frac{1}{3}} \sum_{\varrho=0}^{\infty} 2^{\frac{2}{3}\lambda(n_\varrho)-(m-1)n_\varrho}$$

$$= \pi^{\frac{1}{3}} \sum_{\varrho=0}^{\infty} 2^{\frac{2}{3}n_{\varrho+1}-(m-\frac{1}{3})n_\varrho} = \pi^{\frac{1}{3}} U(x).$$

Eine absolute untere Grenze für $S(x)$ findet man folgendermaßen:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2^{(m-1)n}(\sin(2^n x\pi))^{\frac{2}{3}}} > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2^{(m-1)n}}$$

$$= \frac{\pi}{1-\frac{1}{2^{m-1}}} = \frac{\pi \cdot 2^{m-1}}{2^{m-1}-1} > \pi,$$

da $m > 1$.

Ferner werde $S(x)$ nach oben hin abgeschätzt:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2^{(m-1)n}(\sin(\mathfrak{A}[2^n \cdot x]\pi))^{\frac{2}{3}}} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2^{(m-1)n}\left(\frac{7}{12}\mathfrak{A}[2^n \cdot x]\pi\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$< \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{\frac{1}{3}}\left(\frac{12}{7}\right)^{\frac{2}{3}}}{2^{(m-1)n} \cdot 2^{-(\lambda(n)+1)\cdot\frac{2}{3}}} = \pi^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{24}{7}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{2}{3}\lambda(n)-(m-1)n}$$

$$< \frac{24}{7} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{2}{3}\lambda(n)-(m-1)n} = \frac{24}{7} T(x),$$

da $\pi < \frac{24}{7}$.

Es ist aber

$$\frac{24}{7} T(x) = \frac{24}{7} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\nu=n_{\varrho+1}-n_{\varrho}-1} 2^{\frac{2}{3}\lambda(n_\varrho+\nu)-(m-1)n_\varrho+\nu)} \right\}.$$

Nun ist

$$\lambda(n_\varrho) = n_{\varrho+1} - n_\varrho, \ \lambda(n_\varrho + \nu) = n_{\varrho+1} - n_\varrho - \nu,$$

solange

$$n_\varrho + \nu \leqq n_{\varrho+1} - 1 \text{ oder } \nu \leqq n_{\varrho+1} - n_\varrho - 1.$$

Das setze man ein:

$$\frac{24}{7} T(x) = \frac{24}{7} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\nu=n_{\varrho+1}-n_{\varrho}-1} 2^{\frac{2}{3}(n_{\varrho+1}-n_\varrho-\nu)-(m-1)(n_\varrho+\nu)} \right\}$$

$$< \frac{24}{7} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\frac{2}{3}(n_{\varrho+1}-n_\varrho-\nu)-(m-1)(n_\varrho+\nu)} \right\}$$

$$= \frac{24}{7} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \left\{ 2^{\frac{2}{3}(n_{\varrho+1}-n_\varrho)-(m-1)n_\varrho} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu\left(\frac{2}{3}+m-1\right)} \right\}$$

$$= \frac{24}{7} U(x) \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu\left(m-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{24}{7} U(x) \frac{1}{1-2^{-\left(m-\frac{1}{3}\right)}} = \frac{24}{7} \cdot \frac{2^{m-\frac{1}{3}}}{2^{m-\frac{1}{3}}-1} \cdot U(x).$$

Hierin ist aber weiter

$$\frac{1}{1-2^{-\left(m-\frac{1}{3}\right)}} < \frac{1}{1-2^{-\left(1-\frac{1}{3}\right)}} < \frac{1}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}} = 3,$$

weil $2^{\frac{3}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

Damit tritt zu der oben bewiesenen Ungleichung

$$S(x) > \pi^{\frac{1}{3}} T(x) \geqq \pi^{\frac{1}{3}} U(x),$$

die weitere

$$S(x) < \frac{24}{7} T(x) < \frac{72}{7} U(x)$$

hinzu; also konvergiert und divergiert die Reihe $S(x)$ gleichzeitig mit der Reihe $U(x)$.

§ 3.

Durch passende Verfügung über die n_ϱ kann man aber leicht sowohl divergente als konvergente Reihen $U(x)$ herstellen. Wenn für eine nicht abbrechende Reihe von Indices ϱ der Fall eintritt, daß

$$\frac{2}{3} n_{\varrho+1} - \left(m - \frac{1}{3}\right) n_\varrho \geqq 0$$

oder daß

$$n_{\varrho+1} \geqq \frac{3m-1}{2} n_\varrho,$$

so enthält die Reihe $U(x)$ beliebig viele Glieder $\geqq 2^0 = 1$, muß also divergieren. Das ist eine für die Divergenz von $U(x)$ hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung. Nun kann man aber beispielsweise

$$n_{\varrho+1} = \mathfrak{G}\left[\frac{3m-1}{2} \cdot n_\varrho\right] + p_\varrho$$

machen, wo die p_ϱ eine unendliche Reihe beliebiger ganzer positiver Zahlen bilden mögen. Dann ist die obige Divergenzbedingung sicher erfüllt. Die Menge N_1 aller derartigen $x < \frac{1}{2}$, die also mit 0,0 beginnen, oder n_ϱ-Reihen läßt sich aber eindeutig zuordnen der Menge aller möglichen p_ϱ-Reihen, diese wieder der Menge aller regulären nicht abbrechenden Kettenbrüche, diese der Menge aller positiven irrationalen Zahlen, diese der Menge aller reellen Zahlen C. Bezeichnet man mit M_1 die Menge aller x, für die $U(x)$ und folglich auch $S(x)$ divergiert, so ist

$$N_1 < M_1 < C, \quad N_1 \backsim C,$$

folglich $M_1 \backsim C$ nach dem Äquivalenzsatze.

Damit die Reihe $U(x)$ konvergiert, ist es notwendig, daß von einer bestimmten Stelle ab

$$\frac{2}{3} n_{\varrho+1} - \left(m - \frac{1}{3}\right) n_\varrho < 0$$

ist. Diese Bedingung reicht indessen noch nicht hin.

Durch Vergleichung mit schwach konvergierenden und schwach divergierenden Reihen ließen sich schärfere Kriterien der Konvergenz und Divergenz aufstellen. Es kommen beliebig schwach konvergierende und divergierende Reihen $U(x)$ vor. Für den vorliegenden Zweck ist das folgende einfache Konvergenzkriterium ausreichend.

Es sei μ eine feste positive Zahl, die noch näher bestimmt werden soll. Ist nun für alle $\varrho \geqq P$

$$\frac{2}{3} n_{\varrho+1} - \left(m - \frac{1}{3}\right) n_\varrho \leqq -\mu n_\varrho \text{ oder}$$

$$n_{\varrho+1} \leqq \frac{3m - 3\mu - 1}{2} \cdot n_\varrho,$$

so ist

$$U(x) \leqq \sum_{\varrho=0}^{P-1} 2^{\frac{2}{3} n_{\varrho+1} - (m-\frac{1}{3}) n_\varrho} + \sum_{\varrho=P}^{\infty} 2^{-\mu \cdot n_\varrho}.$$

Nun ist aber

$$\sum_{\varrho=P}^{\infty} 2^{-\mu n_\varrho} \leqq \sum_{n=n_P}^{\infty} 2^{-\mu \cdot n} = \frac{2^{-\mu \cdot n_P}}{1 - 2^{-\mu}} = \frac{1}{2^{\mu \cdot n_P} - 2^{\mu (n_P - 1)}}.$$

Also konvergiert $U(x)$.

Es muß

$$n_{\varrho+1} \geqq n_\varrho + 1$$

sein, also für alle $\varrho \geqq P$

$$\frac{3m - 3\mu - 1}{2} n_\varrho \geqq n_{\varrho+1} \geqq n_\varrho + 1 \text{ oder } \frac{3m - 3\mu - 1}{2} \geqq 1 + \frac{1}{n_\varrho},$$

$$m - \mu - 1 \geqq \frac{2}{3 n_\varrho}.$$

Es war $m - 1 > 0$. Es muß also $\mu < m - 1$ sein und

$$n_P \geqq \frac{2}{3(m - 1 - \mu)}.$$

Um zu zeigen, daß man eine Menge von x finden kann, die dieser Bedingung genügt und dem Kontinuum äquivalent ist, verfahre man folgendermaßen. Wenn in der dyadischen Zahl x nie mehr als ψ gleiche Ziffern aufeinanderfolgen, so ist

$$n_{\varrho+1} \leqq n_\varrho + \psi.$$

Man nehme μ so an, daß

$$m - 1 > \mu > 0$$

wird. Es ist die Bedingung

$$\frac{3m - 3\mu - 1}{2} n_\varrho \geqq n_\varrho + \psi \geqq n_{\varrho+1}$$

erfüllt, wenn

$$n_\varrho \cdot \frac{3}{2}(m-1-\mu) \geqq \psi,$$

d. h. wenn

$$n_P \geqq \frac{2\psi}{3(m-1-\mu)}.$$

Die Bedingung

$$n_{\varrho+1} - n_\varrho \leqq \psi$$

reicht also für die Konvergenz von $S(x)$ aus. Unter sie fallen speziell alle rationalen x, die nicht von der Form $\frac{p}{2^q}$ sind, die also einen periodischen dyadischen Bruch ergeben.

Durchläuft man alle x, die der Bedingung

$$n_{\varrho+1} - n_\varrho \leqq \psi$$

genügen, und setzt man

$$n_{\varrho+1} - n_\varrho - 1 = z_\varrho,$$

so kann z_ϱ die Werte $0, 1, 2, \ldots \psi - 1$ annehmen und $0, z_0 z_1 z_2 \ldots$ (in infinitum) durchläuft alle echten Brüche des ψ-adischen Zahlensystems.

Man ordne der Menge aller reellen Zahlen C die Menge aller Zahlen $0 \leqq x < 1$ zu, schreibe diese als ψ-adische Zahlen mit der Beschränkung, daß eine abbrechende ψ-adische Zahl mit lauter Nullen am Ende, nicht mit lauter $\psi - 1$ geschrieben werden soll.

Jeder ψ-adischen Zahl

$$0, z_0 z_1 z_2 \ldots$$

ordne man eine Reihe

$$n_0, n_1, n_2, \ldots$$

zu nach der Formel

$$n_0 = 0,$$
$$n_{\varrho+1} = \varrho + 1 + \sum_{\sigma=0}^{\varrho} z_\sigma,$$

die der Bedingung

$$n_{\varrho+1} - n_\varrho - 1 = z_\varrho$$

genügt. Der entstehenden n_ϱ-Reihe ordne man dasjenige dyadische $x < \frac{1}{2}$ zu, das (mit 0,0 beginnend) jedesmal hinter der n_ϱ-ten Stelle die Ziffer wechselt. Die Menge dieser x sei N_2, die Menge aller x, für die $U(x)$ konvergiert, sei M_2. Es ist

$$N_2 < M_2 < C, \quad N_2 \backsim C,$$

folglich $M_2 \backsim C$. Daß $M_1 + M_2 = C$, war schon früher bemerkt worden.

§ 4.

Geht man schließlich zur Umkehrungsfunktion von

$$\xi = F(x)$$

über, die die Bezeichnung

$$x = \chi(\xi)$$

führen möge, so ist diese ebenfalls eindeutig, stetig, monoton wachsend. Ihre Ableitung existiert überall und verschwindet für alle Werte von x, für die die Ableitung von $F(x)$ unendlich groß war, da

$$\frac{d\chi(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{\frac{dF(x)}{dx}} = \frac{1}{S(x)}.$$

Da

$$\frac{dF(x)}{d(x)} > \pi$$

war, so ist

$$\frac{d\chi(\xi)}{d\xi} < \frac{1}{\pi},$$

kann also nirgends unendlich groß werden.

Da die Werte von x und ξ einander eindeutig zugeordnet sind, so ist sowohl die Menge der ξ, für die

$$\frac{d\chi(\xi)}{d\xi} = 0,$$

als auch die Menge der ξ, für die

$$\frac{d\chi(\xi)}{d\xi} > 0,$$

dem Kontinuum äquivalent.

Ich will noch zeigen, daß jede Stelle, an der

$$\chi'(\xi) \equiv \frac{d\chi(\xi)}{d\xi} = 0$$

ist, eine Stetigkeitsstelle dieser Ableitung ist. Es sei $\xi = \xi_0$ eine solche Stelle und

$$x_0 = \chi(\xi_0).$$

Es ist also

$$S(x_0) = +\infty.$$

Nach Annahme einer beliebig kleinen Größe $\varepsilon > 0$ soll $\delta > 0$ hinreichend klein so bestimmt werden, daß, wenn $|\xi - \xi_0| < \delta$ ist,

$$|\chi'(\xi) - \chi'(\xi_0)| = \chi'(\xi) < \varepsilon$$

wird. Ist wieder $x = \chi(\xi)$, so heißt das:

$$S(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Zunächst sei

$$x_0 = \frac{p}{2^q},$$

wo p eine ungerade, q irgendeine ganze Zahl ist. Es ist die q-te dyadische Stelle hinter dem Komma eine Eins, alle folgenden Stellen sind Nullen. Es war

$$S(x) > \pi^{\frac{1}{3}} U(x) = \pi^{\frac{1}{3}} \sum_{\varrho=0}^{\infty} 2^{\frac{2}{3}n_{\varrho+1} - (m-\frac{1}{3})n_\varrho}.$$

Es stimme x mit x_0 in allen dessen geltenden Stellen überein. Man setze in x

$$n_P = q.$$

Wenn n_{P+1} hinreichend groß ist, so ist die Bedingung

$$S(x) > \pi^{\frac{1}{3}} \sum_{\varrho=0}^{\infty} 2^{\frac{2}{3}n_{\varrho+1} - (m-\frac{1}{3})n_\varrho} > 2^{\frac{2}{3}n_{P+1} - (m-\frac{1}{3})q} > \frac{1}{\varepsilon}$$

erfüllt.

Es soll also sein

$$2^{\frac{2}{3}n_{P+1}} > \frac{2^{(m-\frac{1}{3})q}}{\varepsilon} \quad \text{oder} \quad 2^{n_{P+1}} > \frac{2^{(\frac{3}{2}m-\frac{1}{2})q}}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}.$$

x muß also mit x_0 auf mindestens n_{P+1} dyadische Stellen übereinstimmen. Dasselbe gilt, wenn man die zweite Schreibung von x_0 benutzt mit einer 0 an q-ter Stelle und unendlich vielen darauf folgenden Einsen. Stimmen x und x_0 auf n_{P+1} Stellen hinter dem Komma überein, so ist

$$x > x_0$$

bei Benutzung der ersten,

$$x < x_0$$

bei Benutzung der zweiten Schreibweise. In beiden Fällen ist die Bedingung

$$|x - x_0| < 2^{-n_{P+1}}$$

hinreichend für die verlangte Übereinstimmung von x und x_0 bis zur n_{P+1}-ten Stelle hinter dem Komma, die wieder hinreicht, damit $S(x) > \frac{1}{\varepsilon}$.

Es sei zweitens

$$S(x_0) = +\infty,$$

ohne daß die einzelnen Glieder unendlich groß werden. Es ist dann auch

$$U(x_0) = +\infty.$$

Man bestimme P so groß, daß

$$\pi^{\frac{1}{3}} U_P(x_0) = \pi^{\frac{1}{3}} \sum_{\varrho=0}^{P} 2^{\frac{2}{3} n_{\varrho+1} - (m-\frac{1}{3}) n_\varrho} > \frac{1}{\varepsilon}$$

wird. Stimmt x mit x_0 mindestens bis zur n_{P+1}-ten Stelle überein, so ist

$$S(x) > \pi^{\frac{1}{3}} U(x) > \pi^{\frac{1}{3}} U_P(x) \geqq \pi^{\frac{1}{3}} U_P(x_0) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$U_P(x)$ und $U_P(x_0)$ stimmen überein bis auf das letzte Glied, das in $U_P(x)$ größer sein kann.

Es sei

$$x = x_0 + \eta;$$

wenn $|\eta| < 2^{-(n_{P+2}+1)}$, so kann die Addition von η zu x_0 höchstens die n_{P+2}-te Stelle ändern. Es stimmen also x und x_0 in mindestens $n_{P+2} - 1$ Stellen überein. Es ist aber

$$n_{P+2} - 1 \geqq n_{P+1}.$$

Die Bedingung

$$|x - x_0| < 2^{-(n_{P+2}+1)}$$

reicht also hin, damit

$$S(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

werde.

In beiden Fällen ist also dafür zu sorgen, daß

$$|x - x_0| < \sigma$$

wird, wo σ eine bereits bestimmte positive Zahl ist.

Es ist aber $x = \chi(\xi)$ eine stetige Funktion. Deshalb läßt sich $\delta > 0$ hinreichend klein so bestimmen, daß mit $|\xi - \xi_0| < \delta$ auch $|x - x_0| < \sigma$ gilt, und infolgedessen $S(x) > \frac{1}{\varepsilon}$ oder $\chi'(\xi) < \varepsilon$ wird. Die Ableitung $\chi'(\xi)$ ist also an allen ihren Nullstellen stetig.

Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten.

Von Herrn *Ludwig Schlesinger* in Giessen.

Einleitung.

Die nachfolgenden Auseinandersetzungen wurzeln einerseits in zwei grundlegenden Konzeptionen von *L. Fuchs*, andererseits in den Untersuchungen über das von mir sogenannte *Riemann*sche Problem, die ich seit einer langen Reihe von Jahren verfolge.

Im Jahre 1884 hat *L. Fuchs**) sich die Aufgabe gestellt, die nicht linearen Differentialgleichungen zu charakterisieren, deren Lösungen nur feste, d. h. mit den Anfangswerten nicht verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen. Es ist ihm gelungen, diese Aufgabe für Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen. Da, wie Herr *Painlevé***) gezeigt hat, die mit den Anfangswerten verschiebbaren singulären Stellen einer Differentialgleichung erster Ordnung stets so beschaffen sind, daß in ihnen die Lösungen sich wie algebraische Funktionen verhalten, fällt die von *Fuchs* behandelte Aufgabe für die Differentialgleichungen erster Ordnung mit der zusammen, diejenigen Differentialgleichungen zu charakterisieren, die überhaupt feste *kritische* Punkte besitzen, wo unter kritischen Punkten Verzweigungspunkte und Unbestimmtheitsstellen (wesentlich singuläre Punkte) zu verstehen sind. Die Aufgabe, die Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung, oder was auf dasselbe hinauskommt, Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei und mehr Unbekannten, an-

*) Werke II, S. 355 ff.

**) Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1888.

zugeben, denen diese Eigenschaft zukommt, hat Herr *Painlevé**) in Angriff genommen, indem er eine Methode entwickelte, die es ermöglicht, einerseits notwendige Bedingungen dafür aufzustellen, daß eine Differentialgleichung nur feste kritische Punkte besitzt, andererseits für eine Differentialgleichung, die diesen notwendigen Bedingungen genügt, zu entscheiden, ob ihre verschiebbaren singulären Punkte wirklich nur Pole der Lösungen sind. Mit Hilfe dieser Methode hat Herr *Painlevé* eine Tabelle der Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

wo f rational in $\frac{dy}{dx}$, algebraisch in y und analytisch in x ist, angegeben, die feste kritische Punkte haben und nicht „auf Quadraturen oder lineare Differentialgleichungen reduzierbar" sind. Wie schwierig sich jedoch die Ausführung des *Painlevé*schen Verfahrens schon in diesem einfachsten Falle gestaltet, geht daraus hervor, daß diese von dem Autor jenes Verfahrens aufgestellte Tabelle, wie sich später gezeigt hat, eine wesentliche Lücke aufweist, indem Herr *Painlevé* gerade diejenige Differentialgleichung zweiter Ordnung übersehen hat, die, wie er selbst**) nachträglich zeigt, in gewissem Sinne die wichtigste und allgemeinste ist. Die Herren *Chazy****) und *Garnier*†) haben dann das Verfahren von Herrn *Painlevé* auf die Differentialgleichungen dritter Ordnung angewandt.

In einer Reihe von Abhandlungen, die von 1888 an erschienen sind††), hat *L. Fuchs* das Problem behandelt, diejenigen homogenen linearen Differentialgleichungen zu charakterisieren, deren Monodromiegruppe unabhängig ist von einem in den Koeffizienten der Differentialgleichung auftretenden Parameter. Die Bedeutung dieses Problems besteht darin, daß unter der angegebenen Bedingung für die Monodromiegruppe die Lösungen der linearen Differentialgleichung als Funktionen des *Parameters* einen

---

*) Bulletin de la Société mathém. 28 (1900); Acta Mathem. 25 (1902).

**) Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, 143 (1906), S. 1114. Über diese Differentialgleichung vgl. weiter unten und Nr. 3 des IV. Teils der vorliegenden Arbeit.

***) Thèses (Paris 1910) = Acta Mathem. 34, S. 317 ff. (1911).

†) Thèses (Paris 1911), première partie.

††) *Fuchs*, Werke III, S. 1—68, 117—139, 169—195, 201—217, 267—279, 295—310.

ähnlichen analytischen Charakter haben, wie als Funktionen der *Differentiationsvariabeln**). Bei *Fuchs* tritt dieser Umstand darin hervor, daß diese Lösungen als Funktionen der Differentiationsvariabeln und des Parameters ein System von partiellen linearen Differentialgleichungen befriedigen**), dessen Koeffizienten aus den Koeffizienten der linearen Differentialgleichung zusammengesetzt sind. In meinen beiden ersten Abhandlungen über das *Riemann*sche Problem***) habe ich dem *Fuchs*schen Problem dadurch eine neue Wendung zu geben versucht, daß ich es mit dem *Riemann*schen in Verbindung setzte; es gelang auf diese Weise, die Abhängigkeit der Lösungen einer linearen Differentialgleichung von der im *Fuchs*schen Problem geforderten Beschaffenheit von dem Parameter zu ergründen†). Nur konnte ich damals das *Riemann*sche Problem, der Bestimmung eines Funktionssystems mit vorgeschriebenen singulären Punkten und vorgeschriebenen Fundamentalsubstitutionen nur in dem Falle lösen, wo die *Konvergenzbedingungen*††) für die *Poincaré*schen séries zétafuchsiennes erfüllt waren. Erst der Gedanke, die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung des *Fuchs*schen Typus durch ein schlechthin kanonisches lineares Differentialsystem in n Unbekannten zu ersetzen, den ich von 1904 an zur Geltung brachte†††), ermöglichte es, einerseits den Beweis für die Lösbarkeit des *Riemann*schen Problems im allgemeinen Falle zu führen*†) und an-

---

*) Etwas Derartiges hatte auch schon *Riemann* vorgeschwebt (siehe Werke II. Aufl. [1892] S. 385, 386 das klein Gedruckte), er hat jedoch die von *Fuchs* aufgestellte, dafür erforderliche Bedingung für die Monodromiegruppe nicht scharf genug hervorgehoben.

**) Siehe insbesondere Werke III, S. 20 ff., 201 ff., 269 ff.

***) Dieses Journal, Bd. 123, S. 138; Bd. 124, S. 292.

†) Dieses Journal, Bd. 124, S. 292 ff.

††) Man findet diese Bedingungen für die Fundamentalsubstitutionen z. B. in der Nr. 3 des IV. Teils dieser Arbeit.

†††) Verhandl. des III. intern. Mathem.-Kongresses in Heidelberg (Leipzig 1905), S. 219; dieses Journal, Bd. 128, S. 263.

*†) Ich habe diesen Existenzbeweis mit Hilfe der Kontinuitätsmethode erbracht (Verhandl. der III. intern. Kongr. S. 219; dieses Journal Bd. 130, S. 26; Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen 1908, S. 286 ff; eine Ungenauigkeit im Ausdruck einzelner Theoreme, auf die Herr *Plemelj*, Jahresbericht der D. M.-V. XVIII (1907) S. 15 ff., aufmerksam gemacht hat, habe ich ebenda S. 21 ff. richtig gestellt). Gleichzeitig hat Herr *Hilbert* (Verh. des III. intern. Kongresses S. 233; Nachr. d. K. Ges. d.

dererseits dem *Fuchs*schen Problem den hohen Grad von Einfachheit zu geben, durch den es einer allgemeinen Behandlung zugänglich wurde.

Es gelang mir nämlich*), die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Fundamentalsubstitutionen eines schlechthin kanonischen linearen Differentialsystems von einem der singulären Punkte unabhängig sind, in völlig expliziter Form aufzustellen, und zwar in der Form eines Differentialsystems, dem die sogenannten Residuen als Funktionen jenes singulären Punktes genügen müssen. *Die Integration dieses Differentialsystems bildet den Gegenstand der vorliegenden Arbeit.* Sie gliedert sich in vier Teile.

Im *ersten* Teile gebe ich eine neue Herleitung des gedachten Differentialsystems aus dem *Fuchs*schen Problem, im *zweiten* formuliere ich das Integrationsproblem, indem ich zunächst eine Anzahl algebraischer Integralgleichungen aufstelle, die eine Reduktion des Differentialsystems auf ein einfacheres gestatten, und dann die allgemeinen Integralgleichungen in zweifacher Form angebe. In der einen dieser Formen treten die unbekannten Funktionen unter den Integralmatrizenzeichen linearer Differentialsysteme auf, in der andern bilden sie die Argumente gewisser meromorpher Funktionen, die konstante Werte annehmen, wenn jene Argumente dem zu lösenden Differentialsystem genügen. Diese Darstellung der Integralgleichungen zeigt erstens, daß jenes Differentialsystem durch die aus linearen Differentialsystemen entspringenden parametralen Funktionen in ähnlicher Weise integriert wird, wie man etwa gewisse lineare Differential-

---

Wiss., Göttingen, math.-phys. Kl. 1905, S. 308) den Existenzbeweis für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Hilfe von Integralgleichungen geliefert, und Herr *Plemelj* hat dann (Anzeiger der Akademie der Wissenschaften zu Wien, 1906 und Monatshefte für Math. u. Physik XIX, S. 211) auf den von mir gegebenen Formulierungen der Theorie der schlechthin kanonischen linearen Differentialsysteme fußend, die Methode des Herrn *Hilbert* für ein lineares Differentialsystem mit n Unbekannten durchgeführt.

*) Dieses Journal, Bd. 129, S. 287. Kurze Zeit vor der Publikation dieses Aufsatzes erschien in den Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, 141 (1905) p. 555 eine Note des Herrn *Richard Fuchs*, in der das analoge Problem für eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen singulären Punkten gelöst wird. Herr *R. Fuchs* findet daselbst jene von Herrn *Painlevé* übersehene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit festen kritischen Punkten (vgl. oben). Auf diese und die allgemeineren Untersuchungen von Herrn *Garnier* kommen wir in der Nr. 3 des IV. Teils der vorliegenden Arbeit zurück.

gleichungen durch Quadraturen (bestimmte Integrale) löst, die die Differentiationsvariable als Parameter enthalten. Sie liefert zweitens die *genuinen* Integrationskonstanten, die in diesem Falle *nicht* durch die Anfangswerte der Lösungen gegeben werden. Im *dritten* Teile werden dann die Eigenschaften jener meromorphen Funktionen entwickelt, soweit sie für unsere Zwecke erforderlich scheinen; namentlich wird gezeigt, daß diese Funktionen für eine Gruppe eindeutiger und eindeutig umkehrbarer algebraischer Transformationen automorph sind; die Fundamentaltransformationen dieser Gruppe werden explizite aufgestellt. Im *vierten* Teile wird dieser Automorphismus interpretiert als eine Beziehung zwischen den verschiedenen Integralsystemen unseres Differentialsystems, die zu denselben Werten jener im zweiten Teile fixierten Integrationskonstanten gehören, und es wird mit Hilfe dieser Beziehung gezeigt, daß dieses Differentialsystem verschiebbare Pole besitzt. Aus der Lösbarkeit des *Riemann*schen Problems folgt dann, daß keine verschiebbaren kritischen Punkte (Verzweigungspunkte und Unbestimmtheitsstellen) vorhanden sein können. Das qualitative Verhalten der Lösungen in der Umgebung der festen kritischen Punkte wird dann allgemein diskutiert, und es werden daraus die Bedingungen abgeleitet, denen die Integrationskonstanten genügen müssen, damit die entsprechenden Lösungen allenthalben eindeutige Funktionen sind. Endlich wird für den Fall, wo die Integrationskonstanten den „Konvergenzbedingungen“ genügen, eine Integration unseres Differentialsystems in expliziter Form durch die séries zétafuchsiennes von Herrn *Poincaré* gegeben und kurz auf den Fall $n = 2$ eingegangen um zu zeigen, daß unsere Integrationstheorie die von den Herren *R. Fuchs*, *Garnier* und *Painlevé* aufgestellten Differentialgleichungen mit festen kritischen Punkten umfaßt. Ich möchte nur noch betonen, daß ich der von mir entwickelten Integrationstheorie insofern eine *prinzipielle* Bedeutung beimesse, als sie zeigt, wie sich die Theorie der linearen Differentialgleichungen für die Integration von nicht linearen Differentialgleichungen nutzbar machen läßt und wie insbesondere die bei der Methode des Herrn *Painlevé* so mühsame Untersuchung der verschiebbaren Unbestimmtheitsstellen hier durch die Lösbarkeit des *Riemann*schen Problems mit einem Schlage erledigt werden kann. Den Inhalt der Nummern 2, 3, 4 des dritten Teiles habe ich der ungarischen Akademie der Wissenschaften am 14. Nov. 1910, den des ersten

Teiles am 13. März 1911 mitgeteilt. Die Grundzüge der ganzen Arbeit wurden in einem auf dem IV. intern. Mathematiker-Kongreß zu Rom am 9. April 1908 gehaltenen Vortrage angedeutet.

Ich mache im folgenden vielfach von der üblichen Matrizenrechnung Gebrauch. Die von mir eingeführten Derivations- und Integrationssymbole haben die folgende Bedeutung. Für eine Matrix von n^2 Funktionen y_{ik} $(i, k = 1, 2, \dots n)$ einer Variabeln x, deren Determinante $|y_{ik}|$ nicht identisch verschwindet, wird

$$(y_{ik})^{-1}\left(\frac{dy_{ik}}{dx}\right) = \mathrm{D}_x(y_{ik})$$

gesetzt (Derivationssymbol). Die Tatsache, daß die y_{ik} eine *Integralmatrix*, d. h. ein System von n linear unabhängigen Lösungen des linearen Differentialsystems

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k} \qquad (k=1, 2, \dots n)$$

bilden, wird dann durch die Gleichung

$$\mathrm{D}_x(y_{ik}) = (a_{ik})$$

ausgedrückt. Wenn die Integralmatrix (y_{ik}) insbesondere für $x = x_0$ die Anfangswerte

$$\lim_{x=x_0} y_{ik} = \delta_{ik}; \quad \delta_{ii} = 1, \quad \delta_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k$$

annimmt, so setze ich

$$(y_{ik}) = \overset{x}{\int_{x_0}} (a_{ik}\,dx + \delta_{ik})$$

(Integrationssymbol).

I. Teil. Das *Fuchs*sche Problem.

1. Aufstellung der Differentialgleichungen für die Integralmatrix und die Residuen.

Es seien für das schlechthin kanonische lineare Differentialsystem

$$\text{(A.)} \qquad \frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda k}^{(\nu)}}{x - a_\nu}, \qquad (k=1, 2, \dots n)$$

wo die $A_{ik}^{(\nu)}$ von x unabhängige Größen bedeuten, die Elemente der Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})$, die eine Integralmatrix (y_{ik}) erfährt, wenn x die singulären Punkte a_ν umkreist, von dem variabel gedachten singulären Punkte a_λ unabhängig.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Abhängigkeit der Integralmatrix (y_{ik}) und der „Residuen" $A_{ik}^{(\nu)}$ von der Variabeln a_λ zu untersuchen. Diese Aufgabe wird als *Fuchs*sches Problem bezeichnet.

Der Einfachheit wegen wird vorausgesetzt, daß die zu den singulären Punkten $a_1, \dots a_\sigma, a_{\sigma+1} = \infty$ gehörigen Fundamentalgleichungen

$$(1.) \qquad \left| \mathsf{A}_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}\omega^{(\nu)} \right| = 0, \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\dots\sigma+1)}$$

wo

$$(2.) \qquad (\mathsf{A}_{ik}^{(\sigma+1)}) = (\mathsf{A}_{ik}^{(\sigma)})^{-1} \cdots (\mathsf{A}_{ik}^{(2)})^{-1} (\mathsf{A}_{ik}^{(1)})^{-1}$$

ist, lauter einfache Wurzeln $\omega_1^{(\nu)}, \dots \omega_n^{(\nu)}$ besitzen. Bedeuten dann

$$(3.) \qquad (\eta_{ik}^{(\nu)}) = (x - a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \varphi_{ik}^{(\nu)}(x) \qquad \left({\scriptstyle i,k=1,2,\dots n \atop \scriptstyle \nu=1,2,\dots\sigma+1}\right)$$

die zu den singulären Punkten $a_1, \dots a_{\sigma+1}$ gehörigen kanonischen Integralmatrizen $\left(\text{wo für } \nu = \sigma+1 \text{ an Stelle von } x - a_\nu \text{ zu setzen ist } \frac{1}{x}\right)$, so sind die

$$(4.) \qquad r_i^{(\nu)} = \frac{\log \omega_i^{(\nu)}}{2\pi\sqrt{-1}}$$

von a_λ unabhängig, und wenn

$$(5.) \qquad (y_{ik}) = (c_{ik}^{(\nu)})(\eta_{ik}^{(\nu)})$$

gesetzt wird, so können auch die $c_{ik}^{(\nu)}$ von a_λ unabhängig gewählt werden, da diese letzteren Matrizen sich durch Auflösung der Gleichungssysteme

$$(6.) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} (\mathsf{A}_{i\alpha}^{(\nu)} - \delta_{i\alpha}\omega_k^{(\nu)}) c_{\alpha k}^{(\nu)} = 0$$

ergeben. Umgekehrt sind, da

$$(7.) \qquad (\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}) = (c_{ik}^{(\nu)})(e^{2\pi\sqrt{-1}\, r_i^{(\nu)}}\delta_{ik})(c_{ik}^{(\nu)})^{-1}$$

ist, die Fundamentalsubstitutionen von a_λ unabhängig, wenn dies für die $r_i^{(\nu)}$ und für die $c_{ik}^{(\nu)}$ gilt.

Wir bilden nun

$$(8.) \qquad \mathrm{D}_{a_\lambda}(y_{ik}) = (y_{ik})^{-1}\left(\frac{\partial y_{ik}}{\partial a_\lambda}\right) = (b_{ik}^{(\lambda)}).$$

Dann haben wir*) in der Umgebung von $x = a_\lambda$

$$(9.) \qquad (b_{ik}^{(\lambda)}) = (\varphi_{ik}^{(\lambda)})^{-1}\left(\frac{-r_i^{(\lambda)}\delta_{ik}}{x - a_\lambda}\right)(\varphi_{ik}^{(\lambda)}) + (\varphi_{ik}^{(\lambda)})^{-1}\left(\frac{\partial \varphi_{ik}^{(\lambda)}}{\partial a_\lambda}\right).$$

Da $\varphi_{ik}^{(\lambda)}$ in der Umgebung von $x = a_\lambda$ holomorph und die Determinante $|\varphi_{ik}^{(\lambda)}|$ im Punkte a_λ von Null verschieden ist, so sind die Elemente der Ma-

*) Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen (Leipzig 1908), S. 322.

trizen $(\varphi_{ik}^{(\lambda)})^{-1}$, $\left(\frac{\partial \varphi_{ik}^{(\lambda)}}{\partial a_\lambda}\right)$ in der Umgebung von a_λ ebenfalls holomorphe Funktionen von x; die $b_{ik}^{(\lambda)}$ besitzen folglich in a_λ einen Pol erster Ordnung.

Es sei in der Umgebung von $x = a_\lambda$

$$\varphi_{ik}^{(\lambda)} = B_{ik}^{(\lambda)} + (x - a_\lambda) C_{ik}^{(\lambda)} + \cdots \text{ in inf.} \tag{10.}$$

Dann ist zufolge der aus dem Differentialsystem (A.) fließenden Rekursionsformeln*)

$$(B_{ik}^{(\lambda)})^{-1} (r_i^{(\lambda)} \delta_{ik}) (B_{ik}^{(\lambda)}) = (A_{ik}^{(\lambda)}), \tag{11.}$$

$$(C_{ik}^{(\lambda)}) (A_{ik}^{(\lambda)}) + (B_{ik}^{(\lambda)}) \Big(\sum_{\mu (\neq \lambda)} \frac{A_{ik}^{(\mu)}}{a_\lambda - a_\mu} \Big) - (r_i^{(\lambda)} \delta_{ik}) (C_{ik}^{(\lambda)}) - (C_{ik}^{(\lambda)}) = 0. \tag{12.}$$

Multipliziert man in (9.) beide Seiten der Gleichung mit $x - a_\lambda$ und setzt dann $x = a_\lambda$, so ergibt sich mit Rücksicht auf (10.) und (11.)

$$\text{Res}_{a_\lambda} b_{ik}^{(\lambda)} = - A_{ik}^{(\lambda)}, \tag{13.}$$

so daß

$$b_{ik}^{(\lambda)} = \frac{- A_{ik}^{(\lambda)}}{x - a_\lambda} + P_{ik}^{(\lambda)} \tag{14.}$$

gefunden wird, wo $P_{ik}^{(\lambda)}$ in der Umgebung von $x = a_\lambda$ holomorph ist. In der Umgebung von $x = a_\nu$, wo $\nu \neq \lambda$ ist, haben wir aber

$$(b_{ik}^{(\lambda)}) = (\varphi_{ik}^{(\nu)})^{-1} \Big(\frac{\partial \varphi_{ik}^{(\nu)}}{\partial a_\lambda} \Big); \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \lambda - 1, \lambda + 1, \ldots \sigma + 1) \tag{15.}$$

die $(b_{ik}^{(\lambda)})$ und folglich auch die $P_{ik}^{(\lambda)}$ sind demnach in der Umgebung eines jeden von $x = a_\lambda$ verschiedenen x-Wertes holomorph ($x = \infty$ eingeschlossen), die $P_{ik}^{(\lambda)}$ sind also von x unabhängig**). Wir erhalten demgemäß die $P_{ik}^{(\lambda)}$ durch die Formel

$$P_{ik}^{(\lambda)} = \frac{d}{dx} [(x - a_\lambda) b_{ik}^{(\lambda)}]$$

dargestellt, d. h. mit Benutzung von (9.)

$$(P_{ik}^{(\lambda)}) = - \frac{d (\varphi_{ik}^{(\lambda)})^{-1}}{dx} (r_i^{(\lambda)} \delta_{ik}) (\varphi_{ik}^{(\lambda)}) - (\varphi_{ik}^{(\lambda)})^{-1} (r_i^{(\lambda)} \delta_{ik}) \Big(\frac{d \varphi_{ik}^{(\lambda)}}{dx} \Big)$$
$$+ (\varphi_{ik}^{(\lambda)}) \Big(\frac{\partial \varphi_{ik}^{(\lambda)}}{\partial a_\lambda} \Big) + (x - a_\lambda) \frac{d}{dx} \Big[(\varphi_{ik}^{(\lambda)})^{-1} \Big(\frac{\partial \varphi_{ik}^{(\lambda)}}{\partial a_\lambda} \Big) \Big],$$

oder, da

---

*) Vorlesungen S. 149. Es ist $A_{ik}^{(\sigma+1)} = - \sum_{\nu=1}^{\sigma} A_{ik}^{(\nu)}$ die zu $x = \infty$ gehörige Residuenmatrix.

**) Vgl. Vorlesungen S. 323. Daselbst sind die hier mit $P_{ik}^{(\lambda)}$ bezeichneten Größen mit $B_{ik}^{(\lambda)}$ bezeichnet.

$$\frac{d(\varphi_{ik}^{(\lambda)})^{-1}}{dx} = -(\varphi_{ik}^{(\lambda)})^{-1}\Big(\frac{d\varphi_{ik}^{(\lambda)}}{dx}\Big)(\varphi_{ik}^{(\lambda)})^{-1}$$

ist,

$$(P_{ik}^{(\lambda)}) = (\varphi_{ik}^{(\lambda)})^{-1}\Big(\frac{d\varphi_{ik}^{(\lambda)}}{dx}\Big)(\varphi_{ik}^{(\lambda)})^{-1}(r_i^{(\lambda)}\delta_{ik})(\varphi_{ik}^{(\lambda)}) - (\varphi_{ik}^{(\lambda)})^{-1}(r_i^{(\lambda)}\delta_{ik})\Big(\frac{d\varphi_{ik}^{(\lambda)}}{dx}\Big)$$
$$+ (\varphi_{ik}^{(\lambda)})^{-1}\Big(\frac{\partial\varphi_{ik}^{(\lambda)}}{\partial a_\lambda}\Big) + (x - a_\lambda)\frac{d}{dx}\Big[(\varphi_{ik}^{(\lambda)})^{-1}\Big(\frac{\partial\varphi_{ik}^{(\lambda)}}{\partial a_\lambda}\Big)\Big].$$

Da der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung von x unabhängig ist, können wir auf der rechten Seite $x = a_\lambda$ setzen und finden, da nach (10.)

$$(\varphi_{ik}^{(\lambda)})_{a_\lambda} = (B_{ik}^{(\lambda)}), \quad \Big(\frac{\partial\varphi_{ik}^{(\lambda)}}{\partial x}\Big)_{a_\lambda} = (C_{ik}^{(\lambda)}),$$
$$\Big(\frac{\partial\varphi_{ik}^{(\lambda)}}{\partial a_\lambda}\Big)_{a_\lambda} = \Big(\frac{\partial B_{ik}^{(\lambda)}}{\partial a_\lambda}\Big) - (C_{ik}^{(\lambda)})$$

ist,

$$(P_{ik}^{(\lambda)}) = (B_{ik}^{(\lambda)})^{-1}(C_{ik}^{(\lambda)})(B_{ik}^{(\lambda)})^{-1}(r_i^{(\lambda)}\delta_{ik})(B_{ik}^{(\lambda)}) - (B_{ik}^{(\lambda)})^{-1}(r_i^{(\lambda)}\delta_{ik})(C_{ik}^{(\lambda)})$$
$$+ (B_{ik}^{(\lambda)})^{-1}\Big(\frac{\partial B_{ik}^{(\lambda)}}{\partial a_\lambda}\Big) - (B_{ik}^{(\lambda)})^{-1}(C_{ik}^{(\lambda)}),$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (11.), (12.):

$$(16.) \qquad (P_{ik}^{(\lambda)}) = \Big(-\sum_{\mu(\neq\lambda)}\frac{A_{ik}^{(\mu)}}{a_\lambda - a_\mu}\Big) + \mathrm{D}_{a_\lambda}(B_{ik}^{(\lambda)}).$$

Diesen Gleichungen stellen sich die folgenden an die Seite, die aus (14.) und (15.) hervorgehen, indem man $x = a_\nu$ bzw. $x = \infty$ setzt:

$$(17.) \qquad (P_{ik}^{(\lambda)}) = \Big(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\nu - a_\lambda}\Big) + \mathrm{D}_{a_\lambda}(B_{ik}^{(\nu)}), \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\dots\lambda-1,\lambda+1,\dots\sigma)}$$

$$(18.) \qquad (P_{ik}^{(\lambda)}) = \mathrm{D}_{a_\lambda}(B_{ik}^{(\sigma+1)}).$$

Wir leiten nun aus den Gleichungen (16.), (17.) Gleichungen für die Derivierten nach a_λ der Residuen $A_{ik}^{(\nu)}$ selbst her, indem wir die aus (11.) folgenden Gleichungen

$$\sum_{a=1}^{n} B_{ia}^{(\nu)}(A_{ak}^{(\nu)} - \delta_{ak}r_i^{(\nu)}) = 0 \qquad {\scriptstyle (i,k=1,2,\dots n)\ (\nu=1,2,\dots\sigma+1)}$$

nach a_λ differenzieren. Da die $r_i^{(\nu)}$ von a_λ unabhängig sind, so ergibt sich

$$\sum_{a=1}^{n}\Big\{\frac{dB_{ia}^{(\nu)}}{da_\lambda}(A_{ak}^{(\nu)} - \delta_{ak}r_i^{(\nu)}) + B_{ia}^{(\nu)}\frac{dA_{ak}^{(\nu)}}{da_\lambda}\Big\} = 0$$

oder in Matrizenform

$$\Big(\frac{dB_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda}\Big)(A_{ik}^{(\nu)}) - (\delta_{ik}r_i^{(\nu)})\Big(\frac{dB_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda}\Big) + (B_{ik}^{(\nu)})\Big(\frac{dA_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda}\Big) = 0,$$

und mit Rücksicht auf (11.), wenn wir zur Abkürzung

$$(19.) \qquad \Big(\frac{dB_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda}\Big)(B_{ik}^{(\nu)})^{-1} = (E_{ik}^{(\nu)})$$

setzen und von rechts her mit $(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}$ komponieren:

$$(20.) \quad (E_{ik}^{(\nu)})(r_i^{(\nu)}\delta_{ik}) - (\delta_{ik}r_i^{(\nu)})(E_{ik}^{(\nu)}) + (B_{ik}^{(\nu)})\Big(\frac{dA_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda}\Big)(B_{ik}^{(\nu)})^{-1} = 0.$$

Wir haben also:

$$(21.) \qquad ((r_k^{(\nu)} - r_i^{(\nu)})E_{ik}^{(\nu)}) = -(B_{ik}^{(\nu)})\Big(\frac{dA_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda}\Big)(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}.$$

Nun ist:

$$(22.) \qquad \mathrm{D}_{a_\lambda}(B_{ik}^{(\nu)}) = (B_{ik}^{(\nu)})^{-1}(E_{ik}^{(\nu)})(B_{ik}^{(\nu)});$$

komponieren wir die Gleichung (20.) von links her mit $(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}$, von rechts her mit $(B_{ik}^{(\nu)})$ und beachten dann die Gleichung (11.), so finden wir demnach:

$$\mathrm{D}_{a_\lambda}(B_{ik}^{(\nu)}) \cdot (A_{ik}^{(\nu)}) - (A_{ik}^{(\nu)})\,\mathrm{D}_{a_\lambda}(B_{ik}^{(\nu)}) + \Big(\frac{dA_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda}\Big) = 0.$$

Es ergeben sich somit mit Rücksicht auf (16.) und (17.) für $\nu = \lambda$ bzw. $\nu \neq \lambda$ die Gleichungen*)

$$(23.) \quad \Big(\frac{dA_{ik}^{(\lambda)}}{da_\lambda}\Big) = \sum_{\mu(\neq\lambda)} \cdot \frac{(A_{ik}^{(\lambda)})(A_{ik}^{(\mu)}) - (A_{ik}^{(\mu)})(A_{ik}^{(\lambda)})}{a_\lambda - a_\mu} + (A_{ik}^{(\lambda)})(P_{ik}^{(\lambda)}) - (P_{ik}^{(\lambda)})(A_{ik}^{(\lambda)}),$$

$$(24.) \quad \Big(\frac{dA_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda}\Big) = \frac{(A_{ik}^{(\lambda)})(A_{ik}^{(\nu)}) - (A_{ik}^{(\nu)})(A_{ik}^{(\lambda)})}{a_\nu - a_\lambda} + (A_{ik}^{(\nu)})(P_{ik}^{(\lambda)}) - (P_{ik}^{(\lambda)})(A_{ik}^{(\nu)}). \quad {}^{(\nu\neq\lambda)}$$

Wir können das Differentialsystem (A.) noch dadurch transformieren, daß wir die Integralmatrix (y_{ik}) von rechts her mit einer beliebigen von x unabhängigen Matrix (α_{ik}) komponieren, wodurch sich die sämtlichen $(A_{ik}^{(\nu)})$ in $(\alpha_{ik})^{-1}(A_{ik}^{(\nu)})(\alpha_{ik})$ verwandeln. Indem wir diese Matrix (α_{ik}) gleich $(B_{ik}^{(\sigma+1)})^{-1}$ nehmen, erreichen wir, daß die zu $x = \infty$ gehörige Residuenmatrix

---

*) In meinen früheren Publikationen habe ich diese Gleichungen dadurch hergeleitet, daß ich die Integrabilitätsbedingungen für die Systeme von simultanen Differentialgleichungen (A.) und (8.) aufstellte; siehe z. B. Vorlesungen S. 324, oder dieses Journal Bd. 129 (1905), S. 294. Dieselbe Methode hat auch Herr *René Garnier* in seiner Note, Comptes Rendus t. 151 (1910), p. 205 und Thèses (Paris 1911), p. 84 ff. angewendet. Ich bemerke noch, daß die obigen Gleichungen (23.), (24.) sowohl in Vorlesungen, S. 325 Gln. (36) als auch in diesem Journal Bd. 129, S. 294 durch ein Versehen mit einem Vorzeichenfehler behaftet erscheinen, indem auf den rechten Seiten die Terme ohne Nenner mit entgegengesetzten Vorzeichen geschrieben sind.

$$(A_{ik}^{(\sigma+1)}) = (B_{ik}^{(\sigma+1)})^{-1}(\delta_{ik} r_i^{(\sigma+1)})(B_{ik}^{(\sigma+1)}) = -\sum_{\nu=1}^{\sigma}(A_{ik}^{(\nu)})$$

sich auf $(\delta_{ik} r_i^{(\sigma+1)})$ reduziert, *also von* a_λ *unabhängig wird.* Denken wir uns diese Transformation von vornherein vollzogen, so daß also schon das Differentialsystem (A.) selbst diese Beschaffenheit besitzt, so ist

$$(B_{ik}^{(\sigma+1)}) = (\delta_{ik}), \quad \left(\frac{dB_{ik}^{(\sigma+1)}}{da_\lambda}\right) = (0)$$

und folglich nach (18.)

$$P_{ik}^{(\lambda)} = 0. \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n) \tag{25.}$$

Das Gleichungssystem (23.), (24.) reduziert sich dann auf

$$\text{(B.)} \qquad \begin{cases} \left(\frac{dA_{ik}^{(\lambda)}}{da_\lambda}\right) = \sum\limits_{\mu(\neq\lambda)} \frac{(A_{ik}^{(\lambda)})(A_{ik}^{(\mu)}) - (A_{ik}^{(\mu)})(A_{ik}^{(\lambda)})}{a_\lambda - a_\mu}, \\ \left(\frac{dA_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda}\right) = \frac{(A_{ik}^{(\lambda)})(A_{ik}^{(\nu)}) - (A_{ik}^{(\nu)})(A_{ik}^{(\lambda)})}{a_\nu - a_\lambda} \qquad (\nu \neq \lambda) \end{cases}$$

d. h. *auf ein Differentialsystem zweiten Grades*) für die Residuen* $A_{ik}^{(\nu)}$, *dessen Bestehen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür darstellt, daß die Monodromiegruppe des linearen Differentialsystems* (A.) *von* a_λ *unabhängig ist.*

Unter der Annahme, daß $(B_{ik}^{(\sigma+1)})$ von a_λ unabhängig**), also die $P_{ik}^{(\lambda)}$ gleich Null sind, lauten die Differentialgleichungen (8.) einfach

$$\text{(C.)} \qquad \mathrm{D}_{a_\lambda}(y_{ik}) = -\frac{(A_{ik}^{(\lambda)})}{x - a_\lambda},$$

und die Gleichungen (16.), (17.) nehmen den Charakter von Differentialgleichungen für die $B_{ik}^{(\nu)}$ an; sie lauten nämlich

$$\text{(D.)} \qquad \begin{cases} \mathrm{D}_{a_\lambda}(B_{ik}^{(\lambda)}) = \sum\limits_{\mu(\neq\lambda)} \frac{(A_{ik}^{(\mu)})}{a_\lambda - a_\mu}, \\ \mathrm{D}_{a_\lambda}(B_{ik}^{(\nu)}) = -\frac{(A_{ik}^{(\lambda)})}{a_\nu - a_\lambda}. \end{cases}$$

2. Bedingungen dafür, daß eine Integralmatrix von (A.) dem System (C.) genügt.

Es bedeute (η_{ik}) irgend eine Integralmatrix des Differentialsystems (A.); wir wollen die von x unabhängige Matrix (γ_{ik}) mit nicht verschwindender Determinante so zu bestimmen suchen, daß

---

*) Siehe Vorlesungen S. 328; Comptes Rendus 1908, t. 146, p. 106; Atti del IV. Congresso intern. dei Matematici t. II, p. 64 (Roma 1904).

**) In der Tat ist dies allein wesentlich, nicht etwa der besondere Umstand, daß $B_{ik}^{(\sigma+1)} = \delta_{ik}$ ist. Man könnte ebenso fordern, daß die $A_{ik}^{(\sigma+1)}$ von a_λ unabhängig sind.

(26.) $$(\gamma_{ik})(\eta_{ik})$$

dem Differentialsystem (C.) Genüge leistet*). Soll dies stattfinden, so muß

$$(\gamma_{ik})\left(\frac{\partial \eta_{ik}}{\partial a_\lambda}\right)+\left(\frac{d\gamma_{ik}}{da_\lambda}\right)(\eta_{ik})=(\gamma_{ik})(\eta_{ik})\left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda-x}\right),$$

also

(27.) $$\left(\frac{d\gamma_{ik}}{da_\lambda}\right)(\eta_{ik})=(\gamma_{ik})(p_{ik})$$

sein, wo

(28.) $$(p_{ik})=(\eta_{ik})\left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda-x}\right)-\left(\frac{\partial \eta_{ik}}{\partial a_\lambda}\right)$$

gesetzt wurde. Nun ist aber

$$\left(\frac{dp_{ik}}{dx}\right)=\left(\frac{d\eta_{ik}}{dx}\right)\left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda-x}\right)+(\eta_{ik})\left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{(a_\lambda-x)^2}\right)-\left(\frac{\partial^2\eta_{ik}}{\partial x\,\partial a_\lambda}\right),$$

also mit Rücksicht auf die Differentialgleichungen (A.), denen (η_{ik}) genügt,

(29.) $$\left(\frac{dp_{ik}}{dx}\right)=(\eta_{ik})\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\left(\frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)\left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda-x}\right)+\left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{(a_\lambda-x)^2}\right)\right)-\left(\frac{\partial^2\eta_{ik}}{\partial x\,\partial a_\lambda}\right).$$

Nun folgt aus den Differentialgleichungen (B.)

$$\frac{\partial}{\partial a_\lambda}\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)=\sum_{\nu=1}^{\sigma}\left(\frac{\partial A_{ik}^{(\nu)}}{\partial a_\lambda}\right)\frac{1}{x-a_\nu}+\frac{(A_{ik}^{(\lambda)})}{(x-a_\lambda)^2}$$

$$=\sum_{\nu(\neq\lambda)}\frac{(A_{ik}^{(\lambda)})(A_{ik}^{(\nu)})-(A_{ik}^{(\nu)})(A_{ik}^{(\lambda)})}{a_\nu-a_\lambda}\,\frac{1}{x-a_\nu}$$

$$+\sum_{\nu(\neq\lambda)}\frac{(A_{ik}^{(\lambda)})(A_{ik}^{(\nu)})-(A_{ik}^{(\nu)})(A_{ik}^{(\lambda)})}{a_\lambda-a_\nu}\,\frac{1}{x-a_\lambda}+\frac{(A_{ik}^{(\lambda)})}{(x-a_\lambda)^2},$$

also, da

$$\frac{1}{(x-a_\lambda)(x-a_\nu)}=\frac{1}{a_\nu-a_\lambda}\,\frac{1}{x-a_\nu}+\frac{1}{a_\lambda-a_\nu}\,\frac{1}{x-a_\lambda}$$

ist,

$$\frac{\partial}{\partial a_\lambda}\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)+\left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda-x}\right)\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)=\sum_{\nu=1}^{\sigma}\left(\frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)\left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda-x}\right)+\left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{(a_\lambda-x)^2}\right).$$

Dies in (29.) eingesetzt gibt

$$\left(\frac{dp_{ik}}{dx}\right)=(\eta_{ik})\left[\frac{\partial}{\partial a_\lambda}\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)+\left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda-x}\right)\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)\right]-\left(\frac{\partial^2\eta_{ik}}{\partial x\,\partial a_\lambda}\right),$$

und da

$$\left(\frac{\partial^2\eta_{ik}}{\partial a_\lambda\,\partial x}\right)=(\eta_{ik})\,\frac{\partial}{\partial a_\lambda}\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)+\left(\frac{\partial\eta_{ik}}{\partial a_\lambda}\right)\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)$$

gefunden wird,

---

*) Vgl. *Fuchs*, Werke Bd. III, S. 272 ff.

$$\Big(\frac{dp_{ik}}{dx}\Big) = -\Big(\frac{\partial \eta_{ik}}{\partial a_\lambda}\Big)\Big(\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\Big) + (\eta_{ik})\Big(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda - x}\Big)\Big(\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\Big) = (p_{ik})\Big(\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\Big).$$

Es ist also (p_{ik}) *eine Integralmatrix von* (A.) und folglich

$$(30.) \qquad (p_{ik}) = (\varepsilon_{ik})(\eta_{ik}),$$

wo die (ε_{ik}) von x unabhängig sind. Setzen wir diesen Ausdruck für (p_{ik}) in (27.) ein, so finden wir nach Unterdrückung von (η_{ik})

$$(31.) \qquad \Big(\frac{d\gamma_{ik}}{da_\lambda}\Big) = (\gamma_{ik})(\varepsilon_{ik})$$

als die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $(\gamma_{ik})(\eta_{ik})$ dem System (C.) genügt*).

Es sei nun insbesondere (η_{ik}) diejenige Integralmatrix von (A.), die sich für den regulären Punkt $x = x_0$ auf die Einheitsmatrix (δ_{ik}) reduziert, also

$$(32.) \qquad (\eta_{ik}) = \int_{x_0}^{x} \Big(\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\, dx + \delta_{ik}\Big);$$

dann ist die zugehörige Matrix (p_{ik}) nach (28.) und (30.)

$$(p_{ik}) = (\varepsilon_{ik})(\eta_{ik}) = (\eta_{ik})\Big(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda - x}\Big) - \Big(\frac{\partial \eta_{ik}}{\partial a_\lambda}\Big),$$

also haben wir, da für $x = x_0$

$$\lim_{x=x_0} \eta_{ik} = \delta_{ik}, \quad \lim_{x=x_0} \frac{\partial \eta_{ik}}{\partial a_\lambda} = 0$$

ist,

$$(33.) \qquad (\varepsilon_{ik}) = \Big(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda - x_0}\Big),$$

wir können also im Sinne von (31.)

$$(34.) \qquad (\gamma_{ik}) = \int_{a_\lambda^{(0)}}^{a_\lambda} \Big(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda - x_0}\, da_\lambda + \delta_{ik}\Big)$$

setzen, wo $a_\lambda^{(0)}$ einen von den $a_\nu (\nu \neq \lambda)$ und von x_0 verschiedenen Wert bedeutet, und haben dann in

---

*) Nehmen wir an Stelle von (η_{ik}) die Integralmatrix $(c_{ik})(\eta_{ik})$ von (A.), so tritt an die Stelle von (p_{ik}) die Matrix: $\Big[(c_{ik})(\varepsilon_{ik})(c_{ik})^{-1} - \Big(\frac{\partial c_{ik}}{\partial a_\lambda}\Big)(c_{ik})^{-1}\Big](c_{ik})(\eta_{ik})$, also an Stelle von (ε_{ik}) die Matrix $(c_{ik})(\varepsilon_{ik})(c_{ik})^{-1} + \mathrm{D}_{a_\lambda}(c_{ik})^{-1}$ und folglich (vgl. Vorlesungen, S. 26 ff.) an Stelle von (γ_{ik}) die Matrix $(\gamma_{ik})(c_{ik})^{-1}$. Natürlich ist mit (γ_{ik}) auch jedes $(c_{ik})(\gamma_{ik})$ eine Lösung unserer Aufgabe, wenn (c_{ik}) eine von a_λ und von x unabhängige Matrix bedeutet.

$$(35.)\qquad \int_{a_\lambda^{(0)}}^{a_\lambda} \Big(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda - x_0}\, da_\lambda + \delta_{ik}\Big) \int_{x_0}^{x} \Big(\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x - a_\nu}\, dx + \delta_{ik}\Big)$$

eine gemeinsame Lösungsmatrix der Systeme (A.) und (C.).

Wenn die Integralmatrix (y_{ik}) des Systems (A.) dem System (C.) Genüge leistet und es bedeutet (A_{ik}) die lineare Substitution, die (y_{ik}) bei irgendeinem geschlossenen Umlaufe von x erfährt, so muß nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung auch $(\mathsf{A}_{ik})(y_{ik})$ das System (C.) befriedigen. Wir haben also nach der bekannten Derivationsregel*)

$$\mathrm{D}_{a_\lambda}(\mathsf{A}_{ik})(y_{ik}) = (y_{ik})^{-1}\,\mathrm{D}_{a_\lambda}(\mathsf{A}_{ik})\,(y_{ik}) + \mathrm{D}_{a_\lambda}(y_{ik}) = \Big(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda - x}\Big),$$

also, da (y_{ik}) das System (C.) befriedigt,

$$\mathrm{D}_{a_\lambda}(\mathsf{A}_{ik}) = 0\,,$$

d. h. die A_{ik} sind von a_λ unabhängig**). Das Bestehen der Gleichungen (C.) ist demnach *notwendig und hinreichend* dafür, daß eine Integralmatrix von (A.) bei Umläufen von x Substitutionen erleidet, die von a_λ unabhängig sind. Daraus folgt, daß für $\nu \neq \lambda$ die zu a_ν gehörigen kanonischen Integralmatrizen und folglich auch die in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorphen Matrizen $(\varphi_{ik}^{(\nu)}(x))$ das System (C.) befriedigen.

II. Teil. Integralgleichungen des Differentialsystems (B.).

1. Die algebraischen Integralgleichungen.

Wir nehmen jetzt das Differentialsystem (B.) für die $n^2\sigma$ Größen $A_{ik}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots \sigma)$ zum Ausgangspunkt, *ohne auf den Ursprung desselben aus dem linearen Differentialsystem* (A.) *zurückzugreifen****).

Zunächst folgt durch Addition der Gleichungen des Systems (B.)

$$\frac{d}{da_\lambda}\Big(\sum_{\nu=1}^{\sigma} A_{ik}^{(\nu)}\Big) = 0\,,$$

also

$$(1.)\qquad -A_{ik}^{(\sigma+1)} = \sum_{\nu=1}^{\sigma} A_{ik}^{(\nu)} = \text{const.};$$

wir sehen, daß die Bedingung, daß die $A_{ik}^{(\sigma+1)}$ von a_λ unabhängig sind,

---

*) Vgl. Vorlesungen, S. 26.

**) *Fuchs*, Werke III, S. 21.

***) Die Auseinandersetzungen des ersten Teils werden in diesem Teile nicht benutzt. Der erste Teil hat überhaupt nur den Zweck zu zeigen, wie die Differentialgleichungen (B.) gefunden worden sind.

notwendig und hinreichend dafür ist, daß die Gleichungen (23.), (24.) des ersten Teils die „einfache Form" (B.) annehmen. Die Gleichungen (1.) stellen n^2 *Integralgleichungen* des Differentialsystems (B.) dar. Um weitere solche Gleichungen zu finden, schicken wir erst eine allgemeine Bemerkung voraus.

Als eine Verallgemeinerung des Differentialsystems für n^2 Unbekannte

$$\text{(I.)} \qquad \left(\frac{du_{ik}}{dx}\right) = (u_{ik})(b_{ik}), \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

das ja dem System von n Differentialgleichungen

$$\text{(II.)} \qquad \frac{du_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda b_{\lambda k} \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

gleichwertig ist, kann man das folgende Differentialsystem für n^2 Unbekannte auffassen:

$$\text{(III.)} \qquad \left(\frac{du_{ik}}{dx}\right) = (u_{ik})(b_{ik}) - (a_{ik})(u_{ik}).$$

Die Theorie dieser Systeme (III.) ist für die Theorie der linearen Differentialsysteme (II.) von der größten Wichtigkeit, wofür man die einschlägigen Stellen meiner „Vorlesungen" vergleichen mag*). Es kommt daselbst immer das Problem vor, bei gegebenen b_{ik} die a_{ik} (oder umgekehrt, bei gegebenen a_{ik} die b_{ik}) so zu bestimmen, daß das Differentialsystem (III.) ein *partikulares* Integralsystem u_{ik} besitzt, dessen Elemente einen gewissen analytischen Charakter haben, nämlich eindeutige (u. z. in der Umgebung eines Punktes oder in der ganzen Ebene), holomorphe, rationale Funktionen von x sind. Man könnte diese Art von Problemen als *diophantische* bezeichnen**); von ihrer Lösung hängt meines Erachtens der ganze zukünftige Fortschritt der Theorie der linearen Differentialgleichungen ab. Hier wird von diesen Problemen nicht die Rede sein; es sollen nur einige formale Betrachtungen an das System (III.) angeknüpft werden.

Wir setzen

$$\text{(IV.)} \qquad u_{ik} = Y_i z_k, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

dann ist

$$\frac{du_{ik}}{dx} = \frac{dY_i}{dx} z_k + Y_i \frac{dz_k}{dx} = \sum_\lambda Y_i z_\lambda b_{\lambda k} - \sum_\lambda a_{i\lambda} Y_\lambda z_k,$$

und diese Gleichungen werden offenbar befriedigt, wenn die Gleichungen

---

*) Siehe daselbst S. 119, 148, 180, 183, 297.

**) Vgl. Vorlesungen, S. 298.

$$\text{(V.)} \qquad \frac{dY_i}{dx} = -\sum_\lambda a_{i\lambda} Y_\lambda, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

$$\text{(VI.)} \qquad \frac{dz_k}{dx} = \sum_\lambda z_\lambda b_{\lambda k} \qquad (k=1,2,\dots n)$$

bestehen. Bedeutet (y_{ik}) eine Integralmatrix des Systems

$$\text{(VII.)} \qquad \frac{dy_k}{dx} = \sum_\lambda y_\lambda a_{\lambda k}, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

so ist bekanntlich*)

$$\text{(VIII.)} \qquad (Y_{ik}) = (y_{ik})^{-1}$$

eine Integralmatrix des Systems (V.) [d. h. es ist

$$\left(\frac{dY_{ik}}{dx}\right) = -(a_{ik})(Y_{ik})].$$

Bedeutet ferner (z_{ik}) eine Integralmatrix des Systems (VI.), so stellen die n^2 Produkte

$$\text{(IX.)} \qquad u_{(\alpha\beta),(ik)} = Y_{i\alpha} z_{\beta k} \qquad (i,k=1,2,\dots n)$$

ein Lösungssystem des Differentialsystems (III.) dar; wir erhalten also für $\alpha, \beta = 1, 2, \dots n$ genau n^2 u. z. von einander unabhängige Lösungssysteme dieses Systems. Bedeutet dann $r_{\alpha\beta}$ ein System von n^2 willkürlichen Konstanten, so ist

$$(u_{ik}) = (Y_{ik})(r_{ik})(z_{ik}) = (y_{ik})^{-1}(r_{ik})(z_{ik})$$

das allgemeine Lösungssystem von (III.). Denn sei u_{ik} irgend ein Lösungssystem von (III.) und setzen wir

$$\text{(X.)} \qquad (u_{ik}) = (Y_{ik})(\gamma_{ik})(z_{ik}),$$

so zeigt man leicht, daß die γ_{ik} von x unabhängig sein müssen. In der Tat folgt, wenn man (X.) in (III.) einsetzt,

$$\left(\frac{dY_{ik}}{dx}\right)(\gamma_{ik})(z_{ik}) + (Y_{ik})\left(\frac{d\gamma_{ik}}{dx}\right)(z_{ik}) + (Y_{ik})(\gamma_{ik})\left(\frac{dz_{ik}}{dx}\right)$$
$$= (Y_{ik})(\gamma_{ik})(z_{ik})(b_{ik}) - (a_{ik})(Y_{ik})(\gamma_{ik})(z_{ik}),$$

also ergibt sich, da

$$\left(\frac{dY_{ik}}{dx}\right) = -(a_{ik})(Y_{ik}),$$

$$\left(\frac{dz_{ik}}{dx}\right) = (z_{ik})(b_{ik})$$

ist, für die (γ_{ik}), daß

$$(Y_{ik})\left(\frac{d\gamma_{ik}}{dx}\right)(z_{ik}) = (0),$$

also da die Determinanten $|Y_{ik}|$, $|z_{ik}|$ von Null verschieden sind, daß

*) Vgl. Vorlesungen, S. 27.

$$\frac{d\gamma_{ik}}{dx} = 0$$

sein muß.

Wenn in dem System (III.) speziell

$$a_{ik} = b_{ik}$$

ist, so ist also für das System

(XI.) $$\left(\frac{du_{ik}}{dx}\right) = (u_{ik})(a_{ik}) - (a_{ik})(u_{ik})$$

das allgemeine Lösungssystem

$$(u_{ik}) = (y_{ik})^{-1}(\gamma_{ik})(y_{ik}).$$

Denken wir uns die Matrix (γ_{ik}) auf ihre *kanonische Form* transformiert:

$$(\gamma_{ik}) = (c_{ik})^{-1}(\varrho_{ik})(c_{ik}),$$

wo also

$$\varrho_{ik} = 0 \text{ für } i < k, \quad |\gamma_{ik} - \delta_{ik}\varrho_{\lambda\lambda}| = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

ist, so können wir das allgemeine Lösungssystem von (XI.) in der Form

(XII.) $$(u_{ik}) = (y_{ik})^{-1}(\varrho_{ik})(y_{ik})$$

schreiben, wo jetzt (y_{ik}) nicht eine spezielle, sondern die allgemeinste Integralmatrix des linearen Systems (VII.) bedeutet, *und* (ϱ_{ik}) *als die kanonische Form der Matrix* (u_{ik}) *selbst angesehen werden kann.*

* * *

Wenn wir für einen Augenblick in dem Differentialsystem (B.) die $A_{ik}^{(\lambda)}$ als bekannt ansehen, so stellen die Gleichungen

(2.) $$\left(\frac{dA_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda}\right) = (A_{ik}^{(\nu)})\left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda - a_\nu}\right) - \left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda - a_\nu}\right)(A_{ik}^{(\nu)})$$

für jedes einzelne $\nu \neq \lambda$ ein System von der Form (XI.) dar. Das entsprechende System (VII.) oder (VI.) lautet dann

(3.) $$\frac{dz_k^{(\nu)}}{da_\lambda} = \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha^{(\nu)} \frac{A_{\alpha k}^{(\lambda)}}{a_\lambda - a_\nu},$$

und das allgemeine Lösungssystem von (2.) ergibt sich nach (XII.) in der Form

(4.) $$(A_{ik}^{(\nu)}) = (z_{ik}^{(\nu)})^{-1}(\varrho_{ik}^{(\nu)})(z_{ik}^{(\nu)}),$$

wo $(z_{ik}^{(\nu)})$ die allgemeinste Integralmatrix von (3.) und $(\varrho_{ik}^{(\nu)})$ eine kanonische Matrix mit konstanten (von a_λ unabhängigen) Elementen bedeutet. Da man aber eine Matrix $(A_{ik}^{(\nu)})$ nur auf eine Weise in die kanonische Form transformieren kann, so folgt hieraus, *daß die Wurzeln der zu* $(A_{ik}^{(\nu)})$ *gehörigen charakteristischen Gleichung*

(5.) $$|A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik} r| = 0$$

von a_λ unabhängig sind. Dies liefert für jeden Wert von ν genau n Integralgleichungen des Systems (2.), wir haben also im ganzen $n(\sigma-1)$ Integralgleichungen des Systems (B.) gewonnen.

Genau ebenso folgt aus den für die $\frac{dA_{ik}^{(\lambda)}}{da_\lambda}$ geltenden Gleichungen des Systems (B.), wenn man darin die $A_{ik}^{(\nu)}$ $(\nu \neq \lambda)$ als bekannt ansieht, daß

(6.) $$(A_{ik}^{(\lambda)}) = (z_{ik}^{(\lambda)})^{-1} (\varrho_{ik}^{(\lambda)}) (z_{ik}^{(\lambda)})$$

ist, wo $(z_{ik}^{(\lambda)})$ die allgemeinste Integralmatrix des Systems

(7.) $$\frac{dz_k^{(\lambda)}}{da_\lambda} = \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha^{(\lambda)} \sum_{\nu(\neq\lambda)} \frac{A_{ik}^{(\nu)}}{a_\lambda - a_\nu},$$

$\varrho_{ik}^{(\lambda)}$ eine konstante und kanonische Matrix bedeutet. Es sind also auch die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

(8.) $$|A_{ik}^{(\lambda)} - \delta_{ik} r| = 0$$

von a_λ unabhängig, was n neue Integralgleichungen des Systems (B.) liefert, *so daß wir* (vgl. die Gleichungen (1.)) *jetzt im ganzen*

$$n\sigma + n^2$$

algebraische Integralgleichungen des Systems (B.) *gefunden haben**).

2. Formulierung des Integrationsproblems für das Differentialsystem (B.).

Wir können nunmehr das Problem der Integration des Differentialsystems (B.) wie folgt formulieren**):

Es seien $A_{ik}^{(\sigma+1)}$ n^2 willkürliche Konstanten (d. h. von a_λ unabhängige Größen); wir können etwa gleich

(9.) $$A_{ik}^{(\sigma+1)} = \delta_{ik} r_i^{(\sigma+1)} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

nehmen. Gleichermaßen seien

(10.) $$r_i^{(\nu)} \qquad (i = 1, 2, \ldots n;\ \nu = 1, 2, \ldots \lambda-1, \lambda+1, \ldots \sigma)$$

$n(\sigma-1)$ willkürliche Konstanten.

Wir setzen

(11.) $$(A_{ik}^{(\nu)}) = (B_{ik}^{(\nu)})^{-1} (\delta_{ik} r_i^{(\nu)}) (B_{ik}^{(\nu)}), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \lambda-1, \lambda+1, \ldots \sigma)$$

(12.) $$(A_{ik}^{(\lambda)}) = -(A_{ik}^{(\sigma+1)}) - \sum_{\nu(\neq\lambda)} (A_{ik}^{(\nu)})$$

und denken uns die $(B_{ik}^{(\nu)})$ $(\nu \neq \lambda)$ aus den Differentialgleichungen

---

*) Vgl. Vorlesungen, S. 329.

**) Wir beschränken uns dabei (vgl. oben, S. 102) auf den „einfachsten Fall", wo die kanonischen Matrizen $(\varrho_{ik}^{(\nu)})$ nur Diagonalglieder enthalten. Die entsprechenden Resultate für den „allgemeinen Fall" sind nur algebraisch komplizierter.

$$(E.) \qquad \frac{dB_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda} = \sum_{a=1}^{n} B_{ia}^{(\nu)} \frac{A_{ak}^{(\lambda)}}{a_\lambda - a_\nu} \qquad (\nu \neq \lambda)$$

(vgl. die Gleichungen (3.) und (D.)) bestimmt. Differenzieren wir nun (11.) nach a_λ, so kommt:

$$\left(\frac{dA_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda}\right) = \frac{d(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}}{da_\lambda}(\delta_{ik} r_i^{(\nu)})(B_{ik}^{(\nu)}) + (B_{ik}^{(\nu)})^{-1}(\delta_{ik} r_i^{(\nu)}) \frac{d(B_{ik}^{(\nu)})}{da_\lambda},$$

also da*)

$$\frac{d(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}}{da_\lambda} = -(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}\left(\frac{dB_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda}\right)(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}$$

und nach (E.)

$$(E'.) \qquad \mathrm{D}_{a_\lambda}(B_{ik}^{(\nu)}) = \left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda - a_\nu}\right)$$

ist, so ergibt sich weiter

$$\left(\frac{dA_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda}\right) = -\left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda - a_\nu}\right)(A_{ik}^{(\nu)}) + (A_{ik}^{(\nu)})\left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda - a_\nu}\right).$$

Die durch die Gleichungen (11.) definierten $(A_{ik}^{(\nu)})$ befriedigen also die für $\frac{dA_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda}$ geltenden der Gleichungen (B.). Nun folgt weiter durch Differentiation von (12.)

$$\frac{dA_{ik}^{(\lambda)}}{da_\lambda} = -\sum_{\nu(\neq\lambda)} \frac{dA_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda},$$

und folglich für die durch (12.) definierten $(A_{ik}^{(\lambda)})$ das Bestehen der ersten der Gleichungen (B.), so daß also aus dem Bestehen der Differentialgleichungen (E.) für die $(B_{ik}^{(\nu)})$ $(\nu \neq \lambda)$, das Bestehen der Differentialgleichungen (B.) für die durch (11.), (12.) definierten $(A_{ik}^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \ldots \sigma)$ folgt, wenn die $A_{ik}^{(\sigma+1)}$ und die $r_i^{(\nu)}$ $(\nu \neq \lambda)$ Konstanten bedeuten. Daraus folgt aber nun weiter (vgl. oben S. 113), daß, wenn wir

$$(A_{ik}^{(\lambda)}) = (B_{ik}^{(\lambda)})^{-1}(\delta_{ik} r_i^{(\lambda)})(B_{ik}^{(\lambda)})$$

setzen, die $r_i^{(\lambda)}$ von a_λ unabhängig sein müssen, und aus (12.) selbst folgt endlich das Bestehen der *Fuchs*schen Relation

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma+1} \sum_{i=1}^{n} r_i^{(\nu)} = 0.$$

Wir haben also den Satz: Bedeuten $(B_{ik}^{(\nu)})$ $(\nu \neq \lambda)$ das allgemeinste Lösungssystem des Differentialsystems (E.), worin die $A_{ik}^{(\lambda)}$ durch die Gleichungen (11.), (12.) mit den $n^2 + n(\sigma - 1)$ willkürlichen Konstanten

$$(A_{ik}^{(\sigma+1)}), \quad r_i^{(\nu)} \qquad (\nu \neq \lambda; i = 1, 2, \ldots n)$$

---

*) Vgl. Vorlesungen, S. 27, Gl. (22.).

definiert sind, so stellen die $A_{ik}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \dots \sigma)$ das allgemeinste Lösungssystem des Differentialsystems (B.) dar.

Was das Differentialsystem (E.) anlangt, so könnte noch der Umstand Bedenken erregen, daß auf den rechten Seiten die $(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}$ auftreten, was implizite das Nichtverschwinden der Determinanten $|B_{ik}^{(\nu)}|$ voraussetzt. Nun folgt aber*) aus (E.)

$$|B_{ik}^{(\nu)}| = \text{const. } e^{\int_{a_\lambda^{(0)}}^{a} \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{kk}^{(\lambda)}}{a_\lambda - a_\nu} \, da_\lambda},$$

wo $a_\lambda^{(0)}$ einen willkürlichen, von den a_ν $(\nu \neq \lambda)$ verschiedenen Wert von a_λ bedeutet, also, da nach (12.)

$$\sum_{k=1}^{n} A_{kk}^{(\lambda)} = \sum_{k=1}^{n} r_k^{(\lambda)} = \text{const.}$$

sein muß,

$$(13.) \qquad |B_{ik}^{(\nu)}| = \text{const.} \left(\frac{a_\nu - a_\nu}{a_\lambda^{(0)} - a_\nu} \right)^{\sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha^{(\lambda)}}.$$

Wenn wir also für die $B_{ik}^{(\nu)}$ etwa ihre Anfangswerte für $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$

$$(14.) \qquad \lim_{a_\lambda = a_\lambda^{(0)}} B_{ik}^{(\nu)} = \bar{B}_{ik}^{(\nu)} \qquad (\nu \neq \lambda)$$

so vorschreiben, daß die Determinanten $|\bar{B}_{ik}^{(\nu)}|$ nicht verschwinden, so sind nach (13.) auch die Determinanten

$$(15.) \qquad |B_{ik}^{(\nu)}| = |\bar{B}_{ik}^{(\nu)}| \left(\frac{a_\lambda - a_\nu}{a_\lambda^{(0)} - a_\nu} \right)^{\sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha^{(\lambda)}}$$

für jedes a_λ, das von den a_ν $(\nu \neq \lambda)$ verschieden ist, von Null verschieden. Schreiben wir ferner noch die $n^2 + n(\sigma - 1)$ Konstanten $A_{ik}^{(\sigma+1)}$ und $r_i^{(\nu)} (\nu \neq \lambda)$ willkürlich vor und bilden die $A_{ik}^{(\lambda)}$ nach den Gleichungen (11.), (12.), so besitzt das System (E.) nach dem *Cauchy*schen Existenztheorem ein *wohlbestimmtes* in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ *holomorphes* Integralsystem $B_{ik}^{(\nu)}$, das die Anfangsbedingungen (14.) befriedigt. Das mit diesen $B_{ik}^{(\nu)}$ gebildete Integralsystem (11.) (12.) des Differentialsystems (B.) ist folglich in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ ebenfalls holomorph und befriedigt die Anfangsbedingungen

---

*) Vgl. Vorlesungen, S. 21 ff.

$$\lim_{a_\lambda = a_\lambda^{(0)}} A_{ik}^{(\nu)} = \bar{A}_{ik}^{(\nu)}, \qquad (\nu = 1, 2, \dots \sigma) \tag{16.}$$

wo

$$\begin{cases} (\bar{A}_{ik}^{(\nu)}) = (\bar{B}_{ik}^{(\nu)})^{-1} (\delta_{ik} r_i^{(\nu)}) (\bar{B}_{ik}^{(\nu)}), & (\nu \neq \lambda) \\ (\bar{A}_{ik}^{(\lambda)}) = -(A_{ik}^{(\sigma+1)}) - \sum_{\nu (\neq \lambda)} (\bar{A}_{ik}^{(\nu)}). \end{cases} \tag{17.}$$

3. Die allgemeinen Integralgleichungen des Differentialsystems (B.).

Wir hatten im I. Teil die Differentialgleichungen (B.) aus dem *Fuchs*schen Problem hergeleitet. Die daselbst betrachteten Integralmatrizen linearer Differentialsysteme bilden ein wichtiges Hilfsmittel für die Integration des Differentialsystems (B.) in ähnlicher Weise, wie für gewisse lineare Differentialgleichungen die Darstellung der Lösungen in der Form von bestimmten Integralen erhebliche Vorteile gewährt. Wenn wir, wie in diesem II. Teile, von dem Systeme (B.) ausgehen, so können wir in folgender Weise den Zusammenhang mit den linearen Differentialsystemen herstellen.

Es bedeute x eine von a_λ unabhängige Variable; wir denken uns in der x-Ebene die Punkte $a_1, \dots a_\sigma$ markiert und von diesen aus die Schnitte $l_1, \dots l_\sigma$ nach dem Unendlichen hin gelegt. Der Variabilität von a_λ tragen wir in der Weise Rechnung, daß wir den Schnitt l_λ als ausdehnbaren Faden ansehen, der sich bei einer Ortsveränderung von a_λ um den von a_λ beschriebenen Weg verlängert oder verkürzt. Wenn a_λ sich in der Lage $a_\lambda^{(0)}$ befindet, so bezeichnen wir den entsprechenden Schnitt l_λ mit $l_\lambda^{(0)}$. Die durch die Schnitte l_ν zerschnittene x-Ebene möge mit T und für $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ mit $T^{(0)}$ bezeichnet werden.

Wir bilden uns nun mit den durch die Gleichungen (17.) gegebenen Anfangswerten $\bar{A}_{ik}^{(\nu)}$ das lineare Differentialsystem

$$\frac{dy_k^{(0)}}{dx} = \sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha^{(0)} \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{\bar{A}_{\alpha k}^{(\nu)}}{x - a_\nu^{(0)}}, \tag{$A^{(0)}$.}$$

wo für $\nu \neq \lambda$ die $a_\nu^{(0)} = a_\nu$ zu nehmen sind. Eine Integralmatrix $(y_{ik}^{(0)})$ von ($A^{(0)}$.) ist dann innerhalb $T^{(0)}$ durch ihre Anfangswerte in einem Punkte x_0, der von $a_1, \dots a_{\lambda-1}, a_\lambda^{(0)}, a_{\lambda+1}, \dots a_\sigma$ verschieden ist, eindeutig bestimmt; wir können z. B.

$$(y_{ik}^{(0)}) = \int_{x_0}^{x} \Big(\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{\bar{A}_{ik}^{(\nu)}}{x - a_\nu^{(0)}} dx + \delta_{ik} \Big) \tag{18.}$$

nehmen. Es mögen jetzt die $B_{ik}^{(\nu)}$, $A_{ik}^{(\nu)}$ die in der vorigen Nummer in der

Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ definierten Funktionen von a_λ bedeuten; wir betrachten dann das lineare Differentialsystem

$$(C.) \qquad D_{a_\lambda}(y_{ik}) = \frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda - x} *),$$

und stellen uns die Aufgabe, diejenige Integralmatrix von (C.) zu bestimmen, die sich für $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ auf $(y_{ik}^{(0)})$ reduziert. Diese Aufgabe ist auf Grund der Betrachtungen von I, 2 sofort lösbar. Wir setzen in dem Differentialsystem (A.) die Residuen $A_{ik}^{(\nu)}$ den in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ definierten Lösungen des Differentialsystems (B.) gleich, dann befriedigt die Integralmatrix (35.) von I, 2 (S. 109) des Systems (A.) das System (C.) und reduziert sich für $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ auf $(y_{ik}^{(0)})$. Wir setzen diese Matrix gleich (y_{ik}), also

$$(19.) \qquad (y_{ik}) = \int_{a_\lambda^{(0)}}^{a_\lambda} \Big(\frac{A_{ik}^{(\nu)}}{a_\lambda - x_0} da_\lambda + \delta_{ik}\Big) \int_{x_0}^{x} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x - a_\nu} dx + \delta_{ik}\Big).$$

Dieselbe Integralmatrix ergibt sich aber *direkt* in der Form

$$(20.) \qquad (y_{ik}) = (y_{ik}^{(0)}) \int_{a_\lambda^{(0)}}^{a_\lambda} \Big(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda - x} da_\lambda + \delta_{ik}\Big).$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke (19.), (20.) erhalten wir eine Gleichung, die in Integralmatrizenform die Bedingung dafür ausdrückt, daß die Systeme (A.) und (C.) ein Lösungssystem gemein haben, d. h. die Bedingung dafür, daß die $(A_{ik}^{(\nu)})$ das System (B.) befriedigen. Diese Matrizengleichung, die also n^2 Gleichungen vorstellt, enthält noch den variabeln Parameter x; *sie repräsentiert also eine kontinuierliche Schar von Integralgleichungen des Systems* (B.). Indem wir dem Parameter x geeignete spezielle Werte zuerteilen, werden wir die nötige Anzahl unabhängiger Integralgleichungen erhalten können, u. z. ist es klar, daß wir zufolge der n^2 algebraischen Integralgleichungen (1.) (S. 109.) dem x nur $\sigma - 1$ spezielle Werte beizulegen brauchen, um die noch erforderlichen $n^2(\sigma - 1)$ Integralgleichungen herzustellen. Wenn wir dafür sorgen, daß diese unabhängig voneinander sind, so bürgt der Umstand, daß sie die $n^2\sigma$ willkürlichen Konstanten $\bar{A}_{ik}^{(\nu)}$ enthalten, dafür, daß es die allgemeinen Integralgleichungen des Systems (B.) sein werden. — Es liegt nun sehr nahe, diese speziellen

*) Vgl. I, 1, S. 106; in (C.) spielt x die Rolle eines Parameters; für die speziellen Werte $x = a_\nu$ $(\nu \neq \lambda)$ gehen aus (C.) die Differentialsysteme (E'.) hervor, denen die $B_{ik}^{(\nu)}$ genügen.

Werte von x als die singulären Werte $a_\nu (\nu \neq \lambda)$ zu wählen; wir wollen diese Wahl treffen und müssen dabei nur die Vorsicht gebrauchen, daß wir den Integrationsweg nicht in die Punkte $a_\nu (\nu \neq \lambda)$ einmünden lassen, sondern ihn in Schleifenform um diese Punkte herumführen. Was wir aber auf diese Weise erhalten, ist klar. Offenbar nichts Anderes als die Tatsache, daß die Fundamentalsubstitutionen, die die Integralmatrix $(y_{ik}^{(0)})$ erfährt, wenn x die Schnitte der Fläche $T^{(0)}$ überschreitet, übereinstimmen mit jenen, die die Integralmatrix (y_{ik}) erfährt, wenn x die Schnitte der Fläche T passiert, d. h. mit andern Worten, die Tatsache, daß die Fundamentalsubstitutionen von (y_{ik}) von a_λ unabhängig sind. *Damit ist also in Evidenz gesetzt, daß die Forderung des Fuchsschen Problems direkt die allgemeinen Integralgleichungen des Differentialsystems* (B.) *liefert, und zwar in der Form, daß die $n^2\sigma$ Elemente der von a_λ unabhängigen Fundamentalsubstitutionen als die Integrationskonstanten erscheinen.*

Analytisch kann dies in folgender Weise gefaßt werden. Nach einem bekannten Satze von *Poincaré**) lassen sich die Elemente der Integralmatrix (y_{ik}) als ganze transzendente Funktionen der Residuen $A_{ik}^{(\nu)}$ darstellen, mit Koeffizienten, die nur von den $a_1, \ldots a_\sigma$ und von dem Integrationswege $\overline{x_0 x}$ abhängen; wir setzen:

$$(21.) \qquad y_{ik} = E_{ik}(A_{11}^{(1)}, \ldots A_{nn}^{(\sigma)}; a_1, \ldots a_\sigma; \overline{x_0 x}).$$

Für $x = x_0$ reduziert sich die Integralmatrix (y_{ik}) auf

$$(22.) \qquad (\gamma_{ik}) = \overset{a_\lambda}{\underset{a_\lambda^{(0)}}{\widehat{\int}}} \left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda - x_0} da_\lambda + \delta_{ik} \right);$$

lassen wir also in (21.) x mit x_0 zusammenfallen, oder, was dasselbe heißt, lassen wir x einen innerhalb T verlaufenden geschlossenen Weg s_0 beschreiben, der von x_0 ausgeht, so ist

$$(23.) \qquad (\gamma_{ik}) = E_{ik}(A_{11}^{(1)}, \ldots A_{nn}^{(\sigma)};\ a_1, \ldots a_\sigma;\ s_0).$$

Beschreibt dagegen x die Schleife s_ν, die, von x_0 ausgehend, den Schnitt l_ν einmal im positiven Sinne passiert, und bezeichnen wir (vgl. I, 1) die zu dieser Schleife gehörige Fundamentalsubstitution von (y_{ik}) mit $(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})$, so ist

$$(24.) \qquad (\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})(\gamma_{ik}) = (E_{ik}(A_{11}^{(1)}, \ldots A_{nn}^{(\sigma)};\ a_1, \ldots a_\sigma;\ s_\nu)). \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \sigma)$$

---

*) Vgl. Vorlesungen, S. 245, 308.

Wir erhalten somit die $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ dargestellt in der Form von meromorphen Funktionen der $A_{11}^{(1)}, \dots A_{nn}^{(\sigma)}$ mit gemeinsamem Nenner:

$$(25.) \qquad \mathsf{A}_{ik}^{(\nu)} = G_{ik}^{(\nu)}(A_{11}^{(1)}, \dots A_{nn}^{(\sigma)};\ a_1, \dots a_\sigma),$$

deren Koeffizienten also noch von a_λ abhängen. Dies sind die allgemeinen Integralgleichungen des Differentialsystems (B.) mit den $n^2\sigma$ Integrationskonstanten $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$. Der Zusammenhang zwischen diesen Integrationskonstanten und den Anfangswerten $\bar{A}_{ik}^{(\nu)}$ der $A_{ik}^{(\nu)}$ für $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ wird durch die Gleichungen

$$(26.) \quad \mathsf{A}_{ik}^{(\nu)} = E_{ik}(\bar{A}_{11}^{(1)}, \dots \bar{A}_{nn}^{(\sigma)};\ a_1, \dots a_{\lambda-1}, a_\lambda^{(0)}, a_{\lambda+1}, \dots a_\sigma;\ s_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \dots \sigma)$$

vermittelt, die sich aus (21.) ergeben, wenn man $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ setzt, d. h. die *Poincaré*sche Darstellung auf die Integralmatrix $(y_{ik}^{(0)})$ von ($\mathrm{A}^{(0)}$.) anwendet und dann auf den Schleifenwegen $s_1, \dots s_\sigma$ integriert. Daß die $n^2\sigma$ Gleichungen in der Tat unabhängig voneinander sind, folgt daraus, daß*) die Funktionaldeterminante der $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ nach den $\bar{A}_{ik}^{(\nu)}$ sich für

$$\bar{A}_{11}^{(1)} = 0, \dots \bar{A}_{nn}^{(\nu)} = 0$$

auf

$$(2\pi\sqrt{-1})^{n^2\sigma}$$

reduziert, also nicht identisch verschwindet.

III. Teil. Die Eigenschaften der meromorphen Funktionen $G_{ik}^{(\nu)}$.

1. Der Automorphismus der Funktionen $G_{ik}^{(\nu)}$.

Die Bedeutung der im II. Teile aufgestellten Integralgleichungen des Differentialsystems (B.) für die analytische Diskussion dieses Systems beruht auf der Einführung der Substitutionskoeffizienten $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ als Integrationskonstanten. Während nämlich zu einem System von Anfangswerten $\bar{A}_{ik}^{(\nu)}$ vermöge der Gleichungen (26.) *ein* wohlbestimmtes System der Konstanten $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ gehört, ist es von vornherein klar, daß umgekehrt zu einem System von Werten $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$, im allgemeinen unendlich viele Wertsysteme $\bar{A}_{ik}^{(\nu)}$ und folglich auch unendlich viele Integralsysteme $A_{ik}^{(\nu)}$ der Differentialgleichungen (B.) gehören werden. Der Zusammenhang, der zwischen diesen verschiedenen Integralsystemen besteht, wird nun zunächst zu untersuchen sein; mit andern Worten, wir werden die inversen Funktionen der meromorphen Funktionen $G_{ik}^{(\nu)}$ zu betrachten und die ver-

*) Siehe Vorlesungen, S. 246.

schiedenen Zweigsysteme dieser inversen Funktionen miteinander in Beziehung zu setzen haben.

Bei dieser Untersuchung sind die $A_{ik}^{(\nu)}$ *zunächst* als Funktionen der $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ zu studieren, ihre Abhängigkeit von a_λ bleibt dabei außer Betracht. Wir können also in diesem Teile von dem *Fuchs*schen Problem und von den Differentialgleichungen (B.) ganz absehen und einfach davon ausgehen, daß wir ein lineares Differentialsystem (A.) haben, dessen Integralmatrix (y_{ik}) etwa durch die Anfangsbedingungen

$$(1.) \qquad (y_{ik})_{x=x_0} = (\gamma_{ik})$$

gegeben ist und dessen Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})$ folglich durch die meromorphen Funktionen $G_{ik}^{(\nu)}$ dargestellt werden.

Es bedeute nun $A_{ik}^{(\nu)'}$ ein zweites Residuensystem, für das bei Festhaltung der Punkte $a_1, a_2, \dots a_\sigma$ die meromorphen Funktionen $G_{ik}^{(\nu)}$ dieselben Werte $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ annehmen, wie für $A_{ik}^{(\nu)}$. Bilden wir dann das lineare Differentialsystem

$$(\mathrm{A}'.) \qquad \frac{dy_k'}{dx} = \sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha' \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\alpha k}^{(\nu)'}}{x - a_\nu},$$

so gehören zu der durch die Anfangsbedingungen

$$(1'.) \qquad (y_{ik}')_{x=x_0} = (\gamma_{ik})$$

bestimmten Integralmatrix (y_{ik}') von (A'.) dieselben Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})$; die Differentialsysteme (A.) und (A'.) sind also von derselben *Klasse* (im Sinne von *Riemann*). Es besteht folglich*) zwischen den y_{ik}' und den y_{ik} eine Beziehung von der Form

$$(2) \qquad (y_{ik}') = (y_{ik})(s_{ik}),$$

wo die s_{ik} rationale Funktionen von x bedeuten, deren Determinante $|s_{ik}|$ für keinen von den $a_1, \dots a_\sigma$ verschiedenen Wert von x verschwindet. Umgekehrt wird jede rationale Matrix (s_{ik}), für die die durch (2.) definierte Matrix (y_{ik}') einem schlechthin kanonischen linearen Differentialsystem von der Form (A'.) genügt, zu einem Residuensystem $A_{ik}^{(\nu)'}$ führen, dem die Werte $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ der meromorphen Funktionen $G_{ik}^{(\nu)}$ entsprechen. Es handelt sich also um die Aufstellung aller dieser Matrizen (s_{ik}).

Wenn wir uns zunächst wieder den „einfachsten Fall" vor Augen halten, wo die determinierenden Fundamentalgleichungen für alle singu-

*) Vgl. Vorlesungen, S. 248.

lären Punkte $a_1, \dots a_\sigma, \infty$ keine ganzzahligen Wurzeldifferenzen aufweisen, so gilt der von mir als *Fundamentallemma* bezeichnete Satz*), daß zu einem System von Wurzeln

$$r_1^{(1)}, \dots r_n^{(\sigma+1)}$$

dieser determinierenden Gleichungen nur *ein einziges* Differentialsystem der durch (A.) bestimmten Klasse gehört, für das die den Anfangsbedingungen (1.) genügende Integralmatrix an den Schnitten l_ν die Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})$ erfährt. Bedeutet

$$r_1^{(1)'}, \dots r_n^{(\sigma+1)'}$$

das System von Wurzeln der determinierenden Gleichungen für ein mit (A.) zu derselben Klasse gehöriges Differentialsystem (A'.), so sind die Differenzen

$$r_i^{(\nu)'} - r_i^{(\nu)} = g_i^{(\nu)} \tag{3.}$$

ganze Zahlen, deren Summe verschwinden muß,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{\sigma+1} g_i^{(\nu)} = 0, \tag{4.}$$

und es kann folglich zu einem die Relation (4.) erfüllenden System von ganzen Zahlen $g_i^{(\nu)}$ nur eine Matrix (s_{ik}) und folglich nur ein Residuensystem $A_{ik}^{(\nu)'}$ gehören, dem die Werte $A_{ik}^{(\nu)}$ der meromorphen Funktionen $G_{ik}^{(\nu)}$ entsprechen. Die Menge der Matrizen (s_{ik}) ist demnach jedenfalls eine abzählbare, diese Matrizen können also keinen stetig variabeln Parameter enthalten. Jeder solchen Matrix entspricht eine gewisse Transformation der Residuen $A_{ik}^{(\nu)}$, die diese in die entsprechenden $A_{ik}^{(\nu)'}$ verwandelt, diese Transformation ist offenbar eine algebraische, aber eindeutige; ebenso ist die Inverse dieser Transformation, die den Übergang von den $A_{ik}^{(\nu)'}$ zu den $A_{ik}^{(\nu)}$ vermittelt, eine eindeutige. Wir können diese Transformationen also als *Cremonatransformationen* bezeichnen. Natürlich hängen sie im allgemeinen noch von den $a_1, \dots a_\sigma$, aber ebenfalls algebraisch ab. Diese *Cremona*transformationen können miteinander komponiert werden und bilden offenbar eine Gruppe T. Gehört die Transformation $\mathfrak{T}_1$ dieser Gruppe, angewandt auf die $A_{ik}^{(\nu)}$, zu dem System ganzer Zahlen $g_1^{(\nu)}$, die Transformation $\mathfrak{T}_2$ zu dem System ganzer Zahlen $\bar{g}_1^{(\nu)}$, so gehört sowohl die Transformation $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$, als auch die Transformation $\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_1$ zu dem System ganzer Zahlen $g_1^{(\nu)} + \bar{g}_1^{(\nu)}$. Es ist also zufolge des Fundamentallemmas

*) Vgl. Vorlesungen, S. 234.

$$\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_1,$$

d. h. die betrachtete Gruppe T ist eine *Abel*sche oder kommutative. Durch Anwendung der Transformationen dieser Gruppe ändern die meromorphen Funktionen $G_{ik}^{(\nu)}$ ihre Werte nicht; sie sind in bezug auf diese Transformationen *automorph* und zwar in dem Sinne, daß auch alle Wertsysteme, für die jene meromorphen Funktionen dieselben Werte annehmen, aus einem derselben durch die in Rede stehenden Transformationen hervorgehen.

Wir werden zeigen, daß im allgemeinen zu jedem die Relation (4.) befriedigenden System von ganzen Zahlen $g_i^{(\nu)}$ auch wirklich eine Matrix (s_{ik}) also eine Transformation $\mathfrak{T}$ gehört. Dieser Nachweis wird offenbar geführt sein, wenn wir zeigen, daß sich stets eine Matrix (s_{ik}) angeben läßt, die ein beliebiges $r_\alpha^{(\nu)}$ in $r_\alpha^{(\nu)}+1$ und ein beliebiges $r_\beta^{(\mu)}$ in $r_\beta^{(\mu)}-1$ verwandelt, während alle übrigen $r_i^{(\lambda)}$ ungeändert bleiben. Wir bezeichnen diese Transformation durch $\mathfrak{T}(e_\alpha^{(\nu)}, e_\beta^{(\mu)})$. Die so charakterisierten Transformationen werden wir in den folgenden Nummern wirklich aufstellen. Sie bilden ein System von Fundamentaltransformationen oder eine *Basis* der Gruppe T, enthalten aber noch überflüssige Transformationen, indem z. B.

$$\mathfrak{T}(e_\alpha^{(\nu)}, e_\beta^{(\mu)})\,\mathfrak{T}(e_\gamma^{(\varrho)}, e_\alpha^{(\nu)}) = \mathfrak{T}(e_\gamma^{(\varrho)}, e_\beta^{(\mu)})$$

ist. Eine genauere Diskussion dieser Gruppe T und der zu ihr gehörigen automorphen Funktionssysteme behalte ich mir für eine andere Gelegenheit vor. Ich bemerke nur, daß die *stationären Elemente* der Transformationen von T leicht angegeben werden können; sie werden im Gebiete der $2n^2\sigma$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit der $A_{ik}^{(\nu)}$ dadurch charakterisiert, daß für sie gewisse der determinierenden Gleichungen

$$(6.) \qquad \left|A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}\,r\right|_{(i,\,k=1,2,\ldots n)} = 0 \qquad (\nu=1,2,\ldots\sigma+1)$$

ganzzahlige Wurzeldifferenzen aufweisen. Für die Punkte dieser stationären Mannigfaltigkeiten kann die Funktionaldeterminante der meromorphen Funktionen $G_{ik}^{(\nu)}$ verschwinden, dagegen ist*) diese Determinante, zufolge des Fundamentallemmas, stets von Null verschieden für ein Wertesystem der $A_{ik}^{(\nu)}$, dem determinierende Gleichungen (6.) mit nicht ganzzahligen Wurzeldifferenzen entsprechen. Wir können uns einen Fundamentalbereich der Gruppe T konstruiert denken; innerhalb desselben nehmen die mero-

*) Vgl. Vorlesungen, S. 249.

morphen Funktionen $G_{ik}^{(\nu)}$ jedes Wertsystem, dessen sie fähig sind, einmal an; aus der Lösbarkeit des *Riemans*chen Problems*) folgt, daß die $G_{ik}^{(\nu)}$ jedes Wertesystem $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ annehmen, das so beschaffen ist, daß die Determinanten $|\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}|$ nicht verschwinden. Die $(2n^2\sigma-1)$-fach ausgedehnte Begrenzung dieses Fundamentalbereichs ist zwischen $(2n^2\sigma-2)$, $(2n^2\sigma-4)$, ...-fach ausgedehnten „Kanten" eingespannt, die zu den oben erwähnten stationären Mannigfaltigkeiten gehören; diejenigen $A_{ik}^{(\nu)}$, die dem oben allein betrachteten „einfachsten Falle" entsprechen, liegen also *im Innern* des Fundamentalbereiches.

2. Aufstellung der Fundamentaltransformationen der Gruppe T. Vorbereitendes.

Die Fundamentaltransformationen $\mathfrak{T}(e_\alpha^{(\nu)}, e_\beta^{(\mu)})$ scheiden sich in zwei wesentlich verschiedene Typen, je nachdem

1. $\mu \neq \nu$, oder
2. $\mu = \nu$

ist. Wir beginnen mit dem ersten Typus und wählen als Paradigma die Transformation $\mathfrak{T}(e_\alpha^{(\sigma+1)}, e_1^{(\nu)})$, d. h. wir wollen $r_\alpha^{(\sigma+1)}$ um 1 erhöhen und $r_1^{(\nu)}$ um 1 erniedrigen.

Es sei

$$\eta_{ik}^{(\nu)} = (x-a_\nu)^{r_i^{(\nu)}}(B_{ik}^{(\nu)} + C_{ik}^{(\nu)}(x-a_\nu) + \cdots)$$

die zu $x=a_\nu$ gehörige kanonische Integralmatrix des Systems (A.), wo also

$$|B_{ik}^{(\nu)}| \neq 0. \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

Wir bilden

$$(7.) \qquad (\mathfrak{y}_{ik}) = (\eta_{ik}^{(\nu)})(B_{ik}^{(\nu)})^{-1} = (x-a_\nu)^{r_i^{(\nu)}}(\delta_{ik} + \varepsilon_{ik}^{(1)}(x-a_\nu) + \cdots);$$

dann genügt diese Matrix dem Differentialsystem

$$(\mathrm{A}_\nu.) \qquad \mathrm{D}_x(\mathfrak{y}_{ik}) = \Big(\frac{\delta_{ik}\, r_k^{(\nu)}}{x-a_\nu} + \sum_{\mu\neq\nu} \frac{\mathfrak{A}_{ik}^{(\mu)}}{x-a_\mu}\Big),$$

wo

$$(8.) \qquad (\mathfrak{A}_{ik}^{(\mu)}) = (B_{ik}^{(\nu)})(A_{ik}^{(\mu)})(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}$$

gesetzt wurde. In der Umgebung von $x=a_\nu$ haben wir

*) D. h. es gibt stets schlechthin kanonische Differentialsysteme von der Form (A.), für die die Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})$ an den Schnitten l_ν beliebig vorgeschrieben sind; es können also die $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ beliebige Werte haben, nur müssen die Determinanten $|\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}|$ von Null verschieden sein.

$$\sum_{\mu \neq \nu} \frac{\mathfrak{A}_{ik}^{(\mu)}}{x - a_\mu} = \tau_{ik}^{(0)} + \tau_{ik}^{(1)}(x - a_\nu) + \cdots,$$

wo

$$(9.) \qquad (\tau_{ik}^{(0)}) = \sum_{\mu \neq \nu} \frac{(\mathfrak{A}_{ik}^{(\mu)})}{a_\nu - a_\mu} = \sum_{\mu \neq \nu} \frac{(B_{ik}^{(\nu)})(A_{ik}^{(\mu)})(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}}{a_\nu - a_\mu},$$

und zufolge der Rekursionsformel*)

$$(\varepsilon_{ik}^{(1)})(\delta_{ik} r_i^{(\nu)}) - (\delta_{ik}(r_i^{(\nu)} + 1))(\varepsilon_{ik}^{(1)}) = -(\tau_{ik}^{(0)})$$

ergibt sich

$$(10.) \qquad (r_k^{(\nu)} - 1 - r_i^{(\nu)})\varepsilon_{ik}^{(1)} = -\tau_{ik}^{(0)}.$$

Wir nehmen nun

$$(11.) \qquad \varepsilon_{ik} = \alpha_{ik} + \frac{\beta_{ik}}{x - a_\nu},$$

wo die α_{ik}, β_{ik} Konstanten bedeuten, und setzen

$$(12.) \qquad (\zeta_{ik}^{(\nu)}) = (\eta_{ik})(s_{ik}) = (\eta_{ik}^{(\nu)})(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}(s_{ik}).$$

Dann lautet die Entwickelung dieser Matrix in der Umgebung von $x = a_\nu$

$$(13.) \quad \zeta_{ik}^{(\nu)} = (x - a)^{r_i^{(\nu)}} \Big[\frac{\beta_{ik}}{x - a_\nu} + \alpha_{ik} + \sum_\lambda \varepsilon_{i\lambda}^{(1)} \beta_{\lambda k} + \sum_\lambda (\varepsilon_{i\lambda}^{(1)} \alpha_{\lambda k} + \varepsilon_{i\lambda}^{(2)} \beta_{\lambda k})(x - a_\nu) + \cdots \Big],$$

und wir haben jetzt die Konstanten α_{ik}, β_{ik} zuvörderst so zu bestimmen, daß die $\zeta_{ik}^{(\nu)}$ zum Exponenten $r_1^{(\nu)} - 1$ gehören und die Exponenten der übrigen $\zeta_{2k}^{(\nu)}, \ldots \zeta_{nk}^{(\nu)}$ keine Änderung erfahren. Wir nehmen also

$$(14.) \qquad \beta_{1k} \neq 0, \quad \beta_{ik} = 0; \qquad (i = 2, 3, \ldots n)$$

dann ist

$$\zeta_{1k}^{(\nu)} = (x - a_\nu)^{r_1^{(\nu)} - 1} [\beta_{1k} + (\alpha_{1k} + \sum_\lambda \varepsilon_{1\lambda}^{(1)} \beta_{ik})(x - a_\nu) + \cdots],$$

$$\zeta_{ik}^{(\nu)} = (x - a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} [\alpha_{ik} + \varepsilon_{i1}^{(1)} \beta_{1k} + \cdots]. \qquad (i = 2, 3, \ldots n)$$

Die Matrix der Anfangskoeffizienten lautet also

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \alpha_{21} + \varepsilon_{21}^{(1)} \beta_{11} & \cdots & \alpha_{22} + \varepsilon_{21}^{(1)} \beta_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} + \varepsilon_{n1}^{(1)} \beta_{11} & \cdots & \alpha_{nn} + \varepsilon_{n1}^{(1)} \beta_{1n} \end{pmatrix},$$

und die Determinante dieser Matrix

$$(15.) \qquad \begin{vmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \delta$$

*) Siehe Teil I, 1, Gleich. (12.), S. 103.

darf nicht verschwinden. Die Determinante von (s_{ik}) lautet

$$|s_{ik}| = \frac{\delta}{x - a_\nu} + |\alpha_{ik}|; \tag{16.}$$

wäre $|\alpha_{ik}|$ von Null verschieden, so würde die Determinante (16.) für einen nicht singulären Wert von x verschwinden, was nicht stattfinden darf, damit in das transformierte Differentialsystem kein außerwesentlich singulärer Punkt eingeschmuggelt wird. Es muß also

$$|\alpha_{ik}| = 0 \tag{17.}$$

sein, und wir sehen, daß $|s_{ik}|$ dann stets gleichzeitig mit der Determinante δ von Null verschieden ist.

Für einen von a_ν verschiedenen singulären Punkt a_μ lautet die Matrix der Anfangskoeffizienten der kanonischen Integralmatrix des Differentialsystems (A_ν)

$$(B_{ik}^{(\mu)})(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}, \tag{18.}$$

also für das durch die Transformation (12.) aus (A_ν) hervorgehende Differentialsystem:

$$(B_{ik}^{(\mu)})(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}(s_{ik})_{x=a_\mu} = (B_{ik}^{(\mu)})(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}\Big(\alpha_{ik} + \frac{\delta_{i1}\,\beta_{1k}}{a_\mu - a_\nu}\Big).$$

Da die Determinante dieser Matrix von Null verschieden ist, so haben die Exponenten $r_i^{(\mu)}$ keine Änderung erfahren. Die zu $x = \infty$ gehörige kanonische Integralmatrix des transformierten Systems lautet:

$$(\zeta_{ik}) = \Big(\frac{1}{x}\Big)^{r_i^{(\sigma+1)}} \Big(\bar{B}_{ik} + C_{ik}\frac{1}{x} + \cdots\Big)\Big(\alpha_{ik} + \frac{\beta_{ik}}{x - a_\nu}\Big),$$

wo

$$(\bar{B}_{ik}) = (B_{ik}^{(\sigma+1)})(B_{ik}^{(\nu)-1}*);$$

wir haben also

$$\zeta_{ik} = \Big(\frac{1}{x}\Big)^{r_i^{(\sigma+1)}} \sum_{\lambda=1}^{n} \bar{B}_{i\lambda}\alpha_{\lambda k} + \frac{1}{x}\sum_{\lambda=1}^{n}(C_{i\lambda}\alpha_{\lambda k} + \bar{B}_{i\lambda}\beta_{\lambda k}). \tag{19.}$$

Hierin ist die Determinante der Anfangskoeffizienten

$$\Big|\sum_{\lambda}\bar{B}_{i\lambda}\alpha_{\lambda k}\Big| = |\bar{B}_{ik}||\alpha_{ik}| = 0,$$

da nach (17.) die Determinante $|\alpha_{ik}|$ verschwindet.

Damit die Elemente ζ_{ak} zu dem Exponenten $r_a^{(\sigma+1)} + 1$ gehören (dies soll ja durch unsere Transformation erreicht werden), ist das Be-

*) Wir hatten im I. Teil $B_{ik}^{(\sigma+1)} = \delta_{ik}$ gewählt. Hier möge vorerst diese Matrix noch willkürlich bleiben, die Rechnungen werden dadurch nicht komplizierter.

stehen der Gleichungen

$$\bar{B}_{a1}\alpha_{1k} + \bar{B}_{a2}\alpha_{2k} + \cdots + \bar{B}_{an}\alpha_{nk} = 0 \tag{20.}$$

notwendig. Die α_{ik} müssen also diesen Bedingungen gemäß gewählt werden, was vermöge der Gleichung (17.) in der Tat möglich ist. Ziehen wir dann in den ζ_{ak} die $(r_a^{(\sigma+1)}+1)$-te Potenz von $\frac{1}{x}$ vor die Parenthese, so lautet in der Matrix der Anfangskoeffizienten die α-te Zeile

$$\sum_{\lambda=1}^{n} C_{a\lambda}\alpha_{\lambda k} + \bar{B}_{a1}\beta_{1k} \qquad (k=1,\ldots n)$$

und die i-te Zeile für $i \neq \alpha$

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \bar{B}_{i\lambda}\alpha_{\lambda k}. \qquad (k=1,\ldots n)$$

Die Determinante dieser Matrix lautet also

$$\begin{matrix} \alpha\text{-te Zeile} \\ i\text{-te Zeile} \end{matrix} \left| \begin{matrix} \sum_\lambda C_{a\lambda}\alpha_{\lambda k} \\ \sum_\lambda \bar{B}_{i\lambda}\alpha_{\lambda k} \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} \bar{B}_{a1}\beta_{1k} \\ \sum_\lambda \bar{B}_{i\lambda}\alpha_{\lambda k} \end{matrix} \right| ; \tag{21.}$$

diese muß von Null verschieden sein. Der erste Teil verschwindet zufolge von (17.), es muß also bei der Wahl der α_{ik} und β_{1k} dafür gesorgt werden, daß der zweite Teil nicht verschwindet. Wir haben also diese konstanten Größen so einzurichten, daß

1. in der α-ten Zeile der Determinante $|\bar{B}_{ik}||\alpha_{ik}|$ lauter Nullen stehen; dann sind die Gleichungen (20.) erfüllt; und daß

2. eine nicht verschwindende Determinante entsteht, wenn wir in $|\bar{B}_{ik}||\alpha_{ik}|$ diese verschwindenden Elemente der α-ten Zeile durch

$$\bar{B}_{a1}\beta_{11}, \ldots \bar{B}_{a1}\beta_{1n}$$

ersetzen.

3. Fortsetzung. Eine Aufgabe der analytischen Geometrie des Raumes. Aufstellung der Transformation des ersten Typus.

Offenbar kann der Forderung 2. *nicht* genügt werden, wenn

$$\bar{B}_{a1} = 0 \tag{22.}$$

ist. In diesem Falle erweist sich die Transformation $\mathfrak{T}(e_a^{(\sigma+1)}, e_1^{(\nu)})$ als nicht ausführbar*). Wenn aber $\bar{B}_{a1}$ nicht verschwindet, so lassen sich die Forderungen 1., 2. auf folgende Weise erfüllen.

*) Auf die Möglichkeit, daß gewisse Transformationen $\mathfrak{T}$ für spezielle Werte der $A_{ik}^{(\nu)}$ illusorisch werden können, hat Herr *Plemelj* hingewiesen, Jahresbericht der D. M.-V. XVIII (1909), S. 15, vgl. *Schlesinger*, ebenda, S. 21, 23.

Es seien $\frac{x_2}{x_1}, \dots \frac{x_n}{x_1}$ rechtwinklige Koordinaten eines $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen Raumes. Wir betrachten die $(n-2)$-dimensionale Ebene

$$\bar{B}_{a1}x_1 + \bar{B}_{a2}x_2 + \cdots + \bar{B}_{an}x_n = 0; \tag{23.}$$

dann haben wir in dieser Ebene n Punkte mit den homogenen Koordinaten

$$\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots \alpha_{nk} \qquad (k=1, 2, \dots n) \tag{24.}$$

zu wählen, von denen nicht $n-1$ in einer $(n-3)$-dimensionalen Ebene liegen, und dann noch einen $(n+1)$-ten Punkt mit den Koordinaten $\beta_{11}, \dots \beta_{1n}$ anzunehmen, der nicht in der Ebene (23.) enthalten ist. Die $n-1$ letzten der Punkte (24.) können wir als die Schnittpunkte der Ebene (23.) mit den Koordinatenachsen wählen, also etwa:

$$\begin{aligned}
\bar{B}_{a1}\alpha_{13} + \bar{B}_{a2}\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{33} = \cdots = \alpha_{n3} = 0,\\
\bar{B}_{a1}\alpha_{12} + \bar{B}_{a3}\alpha_{32} = 0, \quad \alpha_{22} = \cdots = \alpha_{n2} = 0,\\
\bar{B}_{a1}\alpha_{15} + \bar{B}_{a4}\alpha_{45} = 0, \quad \alpha_{25} = \cdots = \alpha_{n5} = 0,\\
\bar{B}_{a1}\alpha_{14} + \bar{B}_{a5}\alpha_{54} = 0, \quad \alpha_{24} = \cdots = \alpha_{n4} = 0,\\
\text{etc.},
\end{aligned}$$

den ersten Punkt dagegen wählen wir so, daß

$$\bar{B}_{a2}\alpha_{21} + \bar{B}_{a3}\alpha_{31} = 0, \quad \bar{B}_{a4}\alpha_{41} + \bar{B}_{a5}\alpha_{51} = 0, \quad \text{etc.}$$

ist. Also für ein gerades $n = 2p$ wird

$$\begin{aligned}
\bar{B}_{a,\,2p-2}\alpha_{2p-2,\,1} + \bar{B}_{a,\,2p-1}\alpha_{2p-1,\,1} = 0,\\
\bar{B}_{a,\,2p}\alpha_{2p,\,1} + \bar{B}_{a1}\alpha_{11} = 0,
\end{aligned}$$

dagegen für ein ungerades $n = 2p+1$

$$\begin{aligned}
\bar{B}_{a,\,2p}\alpha_{2p,\,1} + \bar{B}_{a,\,2p+1}\alpha_{2p+1,\,1} = 0,\\
\alpha_{11} = 0,
\end{aligned}$$

so daß also im letzteren Falle der betreffende Punkt im Unendlichen liegt. Die Matrix (α_{ik}) lautet demnach

für $n = 2p$

$$(\alpha_{ik}) = \begin{Vmatrix}
\bar{B}_{a,\,2p} & \bar{B}_{a3} & -\bar{B}_{a2} & \bar{B}_{a5} & -\bar{B}_{a4} & \dots & \bar{B}_{a,\,2p-2} & \bar{B}_{a,\,2p}\\
-\bar{B}_{a3} & 0 & \bar{B}_{a1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
\bar{B}_{a2} & -\bar{B}_{a1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
-\bar{B}_{a5} & 0 & 0 & 0 & \bar{B}_{a1} & \dots & 0 & 0\\
\bar{B}_{a4} & 0 & 0 & -\bar{B}_{a1} & 0 & \dots & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot\\
\bar{B}_{a,\,2p-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
-\bar{B}_{a1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\bar{B}_{a1}
\end{Vmatrix}, \tag{25.}$$

und für $n = 2p + 1$

$$(25^a.) \quad (\alpha_{ik}) = \begin{Vmatrix} 0 & \bar{B}_{a3} & -\bar{B}_{a2} & \bar{B}_{a5} & -\bar{B}_{a4} & \dots & \bar{B}_{a,2p+1} & -\bar{B}_{a,2p} \\ -\bar{B}_{a3} & 0 & \bar{B}_{a1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{B}_{a2} & -\bar{B}_{a1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\bar{B}_{a5} & 0 & 0 & 0 & \bar{B}_{a1} & \dots & 0 & 0 \\ \bar{B}_{a4} & 0 & 0 & -\bar{B}_{a1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ -\bar{B}_{a,2p+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{B}_{a1} \\ \bar{B}_{a,2p} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\bar{B}_{a1} & 0 \end{Vmatrix};$$

in beiden Fällen verschwindet die Determinante dieser Matrix, wie die Gleichung (17.) es erfordert.

Den $(n+1)$-ten Punkt können wir jetzt — da $\bar{B}_{a1}$ von Null verschieden sein, die Ebene (23.) also den Koordinatenanfangspunkt nicht enthalten sollte — in den Koordinatenanfang verlegen; d. h. wir setzen

$$(26.) \qquad \beta_{11} = 1, \beta_{12} = 0, \dots \beta_{1n} = 0.$$

Der Wert der Determinante δ (Gleichung (15.)) wird dann

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots \alpha_{2n} \\ . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \bar{B}_{a1}^{n-1} \neq 0,$$

und die Determinante der Anfangskoeffizienten lautet

$$\bar{B}_{a1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ * & \bar{B}_{i1}\bar{B}_{a3} - \bar{B}_{i3}\bar{B}_{a1} & -\bar{B}_{i1}\bar{B}_{a2} + \bar{B}_{i2}\bar{B}_{a1} & \dots \end{vmatrix} \begin{matrix} \alpha\text{-te Zeile} \\ i\text{-te Zeile } (i \neq \alpha); \end{matrix}$$

die durch $*$ angedeuteten Glieder haben auf den Wert dieser Determinante keinen Einfluß. Schreiben wir für diese Glieder $\bar{B}_{i1}$ in der i-ten Zeile, und addieren dann die mit $\pm \bar{B}_{ak}$ multiplizierten Elemente der ersten Spalte zu den Elementen der k-ten Spalte, so lautet jene Determinante

$$\bar{B}_{a1} \begin{vmatrix} 1 & -\bar{B}_{a3} & \bar{B}_{a2} & \dots \\ \bar{B}_{i1} & -\bar{B}_{i3}\bar{B}_{a1} & \bar{B}_{i2}\bar{B}_{a1} & \dots \end{vmatrix} \begin{matrix} \alpha\text{-te Zeile} \\ i\text{-te Zeile } (i \neq \alpha), \end{matrix}$$

sie hat also den Wert

$$\bar{B}_{a1}^{n-1} \left| \bar{B}_{ik} \right| \neq 0.$$

Wenn wir also in

$$s_{ik} = \alpha_{ik} + \frac{\delta_{i1}\,\delta_{k1}}{x - a_\nu}$$

die α_{ik} den Gleichungen (25.) bzw. (25ª.) entsprechend wählen, so wird das lineare Differentialsystem (A_ν.) in ein Differentialsystem derselben Form transformiert, das mit (A_ν.) zu derselben Klasse gehört und in dem die Exponenten die gewünschte Änderung erfahren haben. Aus (A.) selbst geht dieses Differentialsystem durch die Transformation

$$(27.) \qquad (y_{ik})(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}(s_{ik})$$

hervor, und es lauten in dem transformierten System die Anfangsmatrizen

bei $x = a_\nu$

$$(28.) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots 0 \\ \alpha_{21} + \varepsilon_{21}^{(1)} & \alpha_{22} & \dots \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} + \varepsilon_{n1}^{(1)} & \alpha_{n2} & \dots \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

bei $x = a_\mu$ $(\mu \neq \nu)$

$$(29.) \qquad (B_{ik}^{(\mu)})(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}\Big(\alpha_{ik} + \frac{\delta_{i1}\,\delta_{k1}}{a_\mu - a_\nu}\Big),$$

bei $x = \infty$

$$(30.) \qquad \begin{pmatrix} \sum_{\lambda=1}^{n} C_{\alpha\lambda}\alpha_{\lambda k} + \bar{B}_{\alpha 1}\delta_{1k} \\ \sum_{\lambda=1}^{n} \bar{B}_{i\lambda}\alpha_{\lambda k} \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha\text{-te Zeile} \\ i\text{-te Zeile } (i \neq \alpha). \end{matrix}$$

Die Determinanten der Matrizen (28.), (29.), (30.) haben bzw. die Werte:

$$(31.) \qquad \bar{B}_{a1}^{n-1}; \quad |B_{ik}^{(\mu)}|\,|B_{ik}^{(\nu)}|^{-1}\,\frac{\bar{B}_{a1}^{n-1}}{a_\mu - a_\nu}; \quad |\bar{B}_{ik}| \cdot \bar{B}_{a1}^{n-1},$$

sie sind also mit der $(n-1)$-ten Potenz von $\bar{B}_{a1}^{n-1}$ proportional und haben von Null verschiedene Werte, wenn $\bar{B}_{a1}$ nicht verschwindet. Die Determinante von (s_{ik}) lautet

$$(32.) \qquad |s_{ik}| = \frac{\bar{B}_{a1}^{n-1}}{x - a_\nu}.$$

Von den in den Matrizen (28.), (30.) auftretenden Größen sind die $\varepsilon_{ik}^{(1)}$ durch die Gleichungen (9.), (10.) bestimmt. Was die C_{ik} anlangt, so bemerken wir folgendes:

In der Umgebung von $x = \infty$ lautet das System (A_ν.)

$$(A_\nu'.) \qquad \frac{d\eta_{ik}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_\lambda\Big(\frac{a_{\lambda k}^{(1)}}{x} + \frac{a_{\lambda k}^{(2)}}{x^2} + \dots\Big),$$

wo (vgl. (A_ν.) und (8.))

$$(a_{ik}^{(1)}) = (B_{ik}^{(\nu)})\Big(\sum_{\lambda=1}^{\sigma} A_{ik}^{(\lambda)}\Big)(B_{ik}^{(\nu)})^{-1},$$

$$(a_{ik}^{(2)}) = (B_{ik}^{(\nu)})\Big(\sum_{\lambda=1}^{\sigma} a_\lambda A_{ik}^{(\lambda)}\Big)(B_{ik}^{(\nu)})^{-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ist. Die zu $x = \infty$ gehörige kanonische Integralmatrix von $(A_\nu.)$ ist

$$x^{-r_i^{(\sigma+1)}}\Big(\bar{B}_{ik} + C_{ik}\frac{1}{x} + \cdots\Big),$$

und für die Koeffizienten gelten die Rekursionsformeln

$$(-r_i^{(\sigma+1)}\bar{B}_{ik}) = (\bar{B}_{ik})(a_{ik}^{(1)}),$$

$$(-(r_i^{(\sigma+1)}+1)C_{ik}) = (\bar{B}_{ik})(a_{ik}^{(2)}) + (C_{ik})(a_{ik}^{(1)}),$$

etc.

Die C_{ik} ergeben sich also aus dem linearen Gleichungssystem

$$(33.)\qquad \sum_{\lambda=1}^{n} C_{i\lambda}(-a_{\lambda k}^{(1)} - \delta_{\lambda k}(r_i^{(\sigma+1)}+1)) = \sum_{\lambda=1}^{n}\bar{B}_{i\lambda}a_{\lambda k}^{(2)},$$

dessen Determinante

$$\left|-a_{\lambda k}^{(1)} - \delta_{\lambda k}(r_i^{(\sigma+1)}+1)\right| = \prod_{k=1}^{n}(r_i^{(\sigma+1)}+1-r_k^{(\sigma+1)})$$

ist, also für den „einfachsten Fall" nicht ganzzahliger Wurzeldifferenzen nicht verschwindet. Die C_{ik} sind also rationale Funktionen der $B_{ik}^{(\nu)}$, in deren Nennern nur die nicht verschwindende Determinante $|B_{ik}^{(\nu)}|$ auftritt.

Denken wir uns die in dem Systeme (A.) auftretenden Residuen $A_{ik}^{(\lambda)}$ gegeben und adjungieren wir dem Rationalitätsbereiche die Wurzeln der determinierenden Gleichungen (6.), so sind die $(B_{ik}^{(\lambda)})$ rational bekannt. Betrachten wir also die $(B_{ik}^{(\lambda)})$ für $\lambda = 1, 2, \ldots \sigma$ und die

$$r_1^{(\lambda)}, \ldots r_n^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \sigma)$$

als bekannt, so haben wir dem Rationalitätsbereiche dieser Größen nur noch die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Gleichung

$$\left|-\sum_{\lambda=1}^{\sigma} A_{ik}^{(\lambda)} - \delta_{ik}r\right| = 0$$

zu adjungieren, um einen *Gattungsbereich* zu erhalten, dem auch die $B_{ik}^{(\sigma+1)}$ angehören. Demselben Gattungsbereich gehören auch die Elemente der Matrizen (28.), (29.), (30.) an; in den Nennern dieser Elemente treten nur die Determinanten $|B_{ik}^{(\lambda)}|$ und die Differenzen $r_i^{(\lambda)} + 1 - r_k^{(\lambda)}$ auf. Was die Abhängigkeit dieser Elemente von den $a_1, \ldots a_\sigma$ anlangt, so sind die $\varepsilon_{ik}^{(1)}$ rational in a_λ mit Nennern, die nur die Differenzen $a_\lambda - a_\mu$ enthalten, die

C_{ik} sind nach (33.) ganz rational in den a_λ, da die $a_{ik}^{(1)}$ von a_λ unabhängig, die $a_{ik}^{(2)}$ linear in den a_λ sind.

Es wäre nun noch die Transformation (s_{ik}) so umzugestalten, daß die aus (y_{ik}) hervorgehende transformierte Integralmatrix für $x = x_0$ dieselben Anfangswerte annimmt wie (y_{ik}) selbst. Wir erreichen dies offenbar durch die Transformation

$$(z_{ik}) = (y_{ik})(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}(s_{ik})(s_{ik})_{x=x_0}^{-1}(B_{ik}^{(\nu)}).$$

Bezeichnen wir dann die Anfangsmatrizen des linearen Differentialsystems, dem (z_{ik}) genügt, mit $B_{ik}^{(\lambda)'}$, so gehen diese aus den Matrizen (28.), (29.), (30.) durch Rechtskomposition mit der Matrix

$$\left(\alpha_{ik} + \frac{\delta_{i1}\delta_{k1}}{x_0 - a_\nu}\right)^{-1}(B_{ik}^{(\nu)})$$

hervor. Da die Determinante dieser Matrix den Wert

$$(34.) \qquad |B_{ik}^{(\nu)}| \frac{x_0 - a_\nu}{\bar{B}_{a1}^{n-1}}$$

besitzt, so ergeben sich für die Determinanten der Matrizen $(B_{ik}^{(\lambda)'})$ die Werte

$$|B_{ik}^{(\nu)'}| = (x_0 - a_\nu)|B_{ik}^{(\nu)}|,$$

$$|B_{ik}^{(\mu)'}| = \frac{x_0 - a_\nu}{a_\mu - a_\nu}|B_{ik}^{(\mu)}|, \qquad (\mu \neq \nu)$$

$$|B_{ik}^{(\sigma+1)'}| = (x_0 - a_\nu)|B_{ik}^{(\sigma+1)}|.$$

Die Elemente $B_{ik}^{(\lambda)'}$ selbst gehören wieder dem oben charakterisierten Gattungsbereiche an, sie haben aber die $(n-1)$-te Potenz von $\bar{B}_{a1}$ im Nenner, da die Elemente der Matrix $(s_{ik})_{x=x_0}^{-1}$ die Determinante (32.) im Nenner haben.

Wenn wir statt $r_1^{(\nu)}$ irgend ein $r_\beta^{(\nu)}$ um 1 verkleinern wollen, so werden die Elemente der Anfangsmatrizen des transformierten Systems unserem Gattungsbereich angehören, aber die $(n-1)$-te Potenz von $\bar{B}_{a\beta}$ im Nenner haben. Um endlich die Transformation $\mathfrak{T}(e_a^{(\lambda)}, e_\beta^{(\nu)})$ für einen der Werte

$$\lambda = 1, \ldots \nu - 1, \nu + 1, \ldots \sigma$$

auszuführen, haben wir

$$s_{ik} = \alpha_{ik} + \frac{\delta_{i1}\delta_{k1}(a_\lambda - a_\nu)(x - a_\lambda)}{x - a_\nu}$$

zu nehmen*) und in den Ausdrücken (25.), (25ª.) der α_{ik}

$$(35.) \qquad (\bar{B}_{ik}) = (B_{ik}^{(\lambda)})(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}$$

---

*) Man führt diese Transformation durch die Substitution $x = a_\lambda + \frac{1}{\xi - a'_{\sigma+1}}$ sofort auf $\mathfrak{T}(e_a^{(\sigma+1)}, e_\beta^{(\nu)})$ zurück.

zu setzen. Die Ausführbarkeit dieser Transformation hängt dann von dem Nichtverschwinden des Elements $\bar{B}_{\alpha\beta}$ der Matrix (35.) ab.

4. Fortsetzung. Andere Normierung der Differentialsysteme. Aufstellung der Transformation des zweiten Typus.

Für die Zwecke, die wir im Auge haben, ist eine von der bisherigen verschiedene Normierung des linearen Differentialsystems (A.) und der daraus durch die Transformationen $\mathfrak{T}$ hervorgehenden Systeme bequemer. Wir wollen nämlich die Normierung so vornehmen, daß in den Differentialsystemen allemal die zu $x = \infty$ gehörige Anfangsmatrix wieder die Einheitsmatrix (δ_{ik}) wird (vgl. Teil I, 1). Wenn diese Forderung für das System (A.) erfüllt, also

$$B_{ik}^{(\sigma+1)} = \delta_{ik} \tag{36.}$$

ist, so haben wir, um das gleiche für das transformierte System zu erreichen, die Matrix (s_{ik}) noch von rechts her mit der inversen der zu $x = \infty$ gehörigen Anfangsmatrix des transformierten Systems zu komponieren, also z. B. für $\mathfrak{T}(e_a^{(\sigma+1)}, e_1^{(\nu)})$ mit der inversen der Matrix (30.). Für diese Transformation ist nun zufolge der Gleichungen (36.)

$$(\bar{B}_{ik}) = (B_{ik}^{(\nu)})^{-1},$$

und die Determinanten der Anfangsmatrizen in dem transformierten und normierten Systeme haben demnach die Werte

für a_ν: $\quad |B_{ik}^{(\nu)}|$,

für a_μ $(\mu \neq \nu)$: $\quad \dfrac{1}{a_\mu - a_\nu}$,

für ∞ $\quad 1$.

Die Elemente dieser Anfangsmatrizen gehören zu unserem Gattungsbereich und haben eine Potenz von $\bar{B}_{a1}$ im Nenner. Für die allgemeine Transformation $\mathfrak{T}(e_a^{(\lambda)}, e_\beta^{(\nu)})$ enthalten die Nenner der Elemente der Anfangsmatrizen in dem transformierten und normierten Systeme eine Potenz des Elementes mit den Indizes α, β der Matrix $(B_{ik}^{(\lambda)})(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}$ und ihre Determinanten sind stets von Null verschieden.

Für die Transformation des zweiten Typus nehmen wir als Paradigma die Transformation $\mathfrak{T}(e_2^{(\nu)}, e_1^{(\nu)})$*). Wir können unsere Rechnung sofort an die Formeln (12.) anknüpfen.

*) Vgl. *Plemelj*, Jahresbericht der D. M.-V. XVIII, S. 18.

Damit die $\zeta_{1k}^{(\nu)}$ zum Exponenten $r_1^{(\nu)} - 1$ gehören, muß wenigstens eine der Größen β_{1k} von Null verschieden sein. Damit ferner die $\zeta_{2k}^{(\nu)}$ zum Exponenten $r_2^{(\nu)} + 1$ gehören, muß

$$\beta_{2k} = 0, \quad \alpha_{2k} + \sum_{\lambda=1}^{n} \varepsilon_{2\lambda}^{(1)} \beta_{\lambda k} = 0$$

sein. Damit endlich die Exponenten der $\zeta_{ik}^{(\nu)}$ $(i = 3, \dots n)$ keine Änderung erfahren, müssen die

$$\beta_{ik} = 0, \qquad (i=3, \dots n)$$

aber mindestens eine der Größen

$$\alpha_{ik} + \sum_{\lambda=1}^{n} \varepsilon_{i\lambda}^{(1)} \beta_{\lambda k} \neq 0 \qquad (i=3, \dots n)$$

sein. Wir haben also folgende Bedingungen zu erfüllen:

$$\textit{Ein } \beta_{1k} \neq 0; \qquad \beta_{ik} = 0, \qquad (i=2,3,\dots n;\ k=1,2,\dots n)$$

$$\textit{Ein } \underset{(i=3,\dots n)}{\alpha_{ik}} + \varepsilon_{i1}^{(1)} \beta_{1k} \neq 0; \quad \alpha_{2k} + \varepsilon_{21}^{(1)} \beta_{1k} = 0.$$

Dies wird z. B. durch die folgende Wahl erreicht:

$$\begin{aligned}
&\beta_{11} = 1, \quad \beta_{12} = 0, \beta_{13} = 0, \dots \beta_{1n} = 0,\\
&\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} = 1, \alpha_{13} = 0, \dots \alpha_{1n} = 0,\\
&\alpha_{22} = -\varepsilon_{21}^{(\nu)}, \alpha_{22} = 0, \alpha_{23} = 0, \dots \alpha_{2n} = 0,\\
&\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_{n1} = 0, \quad \alpha_{n2} = 0, \alpha_{n3} = 0, \dots \alpha_{nn} = 1.
\end{aligned}$$

Die Determinante der Matrix (s_{ik}) ist dann

$$|s_{ik}| = \varepsilon_{21}^{(1)},$$

also konstant, so daß tatsächlich kein außerwesentlich singulärer Punkt eingeschmuggelt wird. Die Anfangsmatrix der $\zeta_{ik}^{(\nu)}$ lautet:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0\\
\varepsilon_{21}^{(2)} - \varepsilon_{22}^{(1)} \varepsilon_{21}^{(1)} & \varepsilon_{21}^{(1)} & \varepsilon_{23}^{(1)} & \dots & \varepsilon_{2n}^{(1)}\\
\varepsilon_{31}^{(1)} & 0 & 1 & \dots & 0\\
\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\varepsilon_{n1}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix},$$

ihre Determinante ist ebenfalls gleich $\varepsilon_{21}^{(1)}$. Bei Normierung des transformierten Differentialsystems tritt diese Größe in den Nennern der Anfangselemente auf, das gleiche gilt bei der allgemeinen Transformation $\mathfrak{T}(e_\delta^{(\nu)}, e_\beta^{(\nu)})$ für

$$\varepsilon_{\delta\beta}^{(1)} = \frac{\tau_{\delta\beta}^{(0)}}{r_\delta^{(\nu)} - r_\beta^{(\nu)} + 1},$$

wo (vgl. die Gleichungen (9.))

$$(\tau_{ik}^{(0)}) = \sum_{(\mu \neq \nu)} \frac{(B_{ik}^{(\nu)})(B_{ik}^{(\mu)})^{-1}(\delta_{ik} r_i^{(\mu)})(B_{ik}^{(\mu)})(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}}{a_\nu - a_\mu}$$

ist. Das Element mit den Indizes δ, β dieser Matrix ist also dasjenige, dessen Verschwinden diese Transformation illusorisch machen kann.

IV. Teil. Funktionentheoretische Diskussion des Differentialsystems (B.).

1. Beweis, daß das System (B.) bis auf verschiebbare Pole nur feste singuläre Punkte besitzt.

Wir wollen nun die im III. Teile entwickelte Theorie auf die Diskussion des Differentialsystems (B.) anwenden. Dabei wird es sich als zweckmäßig erweisen, wenn wir das Integrationsproblem dieses Systems in der Weise fassen, wie es in der Nr. 2 des II. Teiles dargelegt worden ist.

Es mögen also vorgeschrieben sein die $n\sigma$ Konstanten

(1.) $$r_i^{(\sigma+1)}, r_i^{(1)}, \ldots r_i^{(\lambda-1)}, r_i^{(\lambda+1)}, \ldots r_i^{(\sigma)} \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

und für $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ die Anfangswerte

(2.) $$\lim_{a_\lambda = a_\lambda^{(0)}} B_{ik}^{(\nu)} = \overline{B}_{ik}^{(\nu)}. \qquad (\nu=1, \ldots \lambda-1, \lambda+1, \ldots \sigma)$$

Wir bilden (vgl. (11.), (12.) des II. Teils)

(3.) $$(A_{ik}^{(\lambda)}) = -(\delta_{ik} r_i^{(\sigma+1)}) - \sum_{\nu \neq \lambda} (B_{ik}^{(\nu)})^{-1}(\delta_{ik} r_i^{(\nu)})(B_{ik}^{(\nu)})$$

und bestimmen durch die Anfangswerte (2.) das in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ holomorphe Lösungssystem $B_{ik}^{(\nu)}$ des Differentialsystems (E′.)

(E′.) $$\mathrm{D}_{a_\lambda}(B_{ik}^{(\nu)}) = \left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda - a_\nu}\right). \qquad (\nu=1, \ldots \lambda-1, \lambda+1, \ldots \sigma)$$

Setzen wir dann (vgl. S. 114)

$$(A_{ik}^{(\lambda)}) = (B_{ik}^{(\lambda)})^{-1}(\delta_{ik} r_{ik}^{(\lambda)})(B_{ik}^{(\lambda)}),$$

so sind die $r_i^{(\lambda)}$ von a_λ unabhängig, und die in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ holomorphen

(4.) $$(B_{ik}^{(\nu)}) \qquad (\nu=1, 2, \ldots \sigma)$$

sind die zu den Punkten $x = a_1, \ldots a_\sigma$ gehörigen Anfangsmatrizen des linearen Differentialsystems (A.). Die zu $x = \infty$ gehörige Anfangsmatrix ist (vgl. die Gleichung (3.)) die Einheitsmatrix δ_{ik}.

Wir machen nun eine Transformation $\mathfrak{T}$, die zu den ganzen Zahlen $g_i^{(\nu)}$ gehört. Durch diese werden die $(B_{ik}^{(\nu)})$ in die Anfangsmatrizen

(5.) $$(\tilde{B}_{ik}^{(\nu)}) \qquad (\nu=1, 2, \ldots \sigma)$$

eines mit (A.) zu derselben Klasse gehörigen linearen Differentialsystems (Ã.) verwandelt. Setzen wir (vgl. (3.))

$$(6.)\quad (\tilde{A}_{ik}^{(\lambda)}) = -(\delta_{ik}(r_i^{(\sigma+1)} + g_i^{(\sigma+1)})) - \sum_{\nu \neq \lambda} (\tilde{B}_{ik}^{(\nu)})^{-1}(\delta_{ik}(r_i^{(\nu)} + g_i^{(\nu)}))(\tilde{B}_{ik}^{(\nu)}),$$

so befriedigen diese $(\tilde{B}_{ik}^{(\nu)})$ das Differentialsystem

$$(\tilde{\mathrm{E}}'.)\qquad \mathrm{D}_{a_\lambda}(\tilde{B}_{ik}^{(\nu)}) = \Big(\frac{\tilde{A}_{ik}^{(\lambda)}}{a_\lambda - a_\nu}\Big). \qquad (\nu = 1, \ldots \lambda-1, \lambda+1, \ldots \sigma)$$

Es handelt sich dann zunächst um die Frage nach dem analytischen Charakter der $\tilde{B}_{ik}^{(\nu)}$ in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$.

Denken wir uns z. B. die angewandte Transformation $\mathfrak{T}$ als die Fundamentaltransformation $\mathfrak{T}(e_a^{(\sigma+1)}, e_1^{(\nu)})$ gewählt, so gehören die $\tilde{B}_{ik}^{(\nu)}$ dem in III, 3 angegebenen Gattungsbereiche an. Da die zu dem Rationalitätsbereiche der $B_{ik}^{(\nu)}$ zu adjungierenden Irrationalitäten $r_i^{(\sigma+1)}$ von a_λ unabhängig und die $B_{ik}^{(\nu)}$ selbst in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ holomorphe Funktionen von a_λ sind, so sind die unserem Gattungsbereiche angehörigen Größen in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ meromorph. Die $\tilde{B}_{ik}^{(\nu)}$ hängen nun aber auch noch explizite von a_λ ab; wie wir in III, 3 gezeigt haben (S. 130), ist diese Abhängigkeit eine rationale. Es sind folglich die $\tilde{B}_{ik}^{(\nu)}$ in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ meromorphe Funktionen von a_λ und die Nenner dieser Funktionen können — solange a_λ endlich und von den a_ν $(\nu \neq \lambda)$ verschieden ist — nur verschwinden, wenn das Element mit den Indizes $\alpha, 1$ der Matrix $(B_{ik}^{(\nu)})^{-1}$ verschwindet (vgl. III, 4, S. 132). Wenn also die Anfangswerte $\overline{B}_{ik}^{(\nu)}$ so beschaffen sind, daß das Element mit den Indizes $\alpha, 1$ der Matrix $(\overline{B}_{ik}^{(\nu)})^{-1}$ von Null verschieden ist, so sind die $\tilde{B}_{ik}^{(\nu)}$ in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ sogar holomorph.

Analoges gilt für die beliebige Fundamentaltransformation $\mathfrak{T}(e_\alpha^{(\mu)}, e_\beta^{(\nu)})$, und da sich die allgemeinste Transformation $\mathfrak{T}$ aus diesen Fundamentaltransformationen zusammensetzen läßt, so können wir sagen:

Die Lösungen $\tilde{B}_{ik}^{(\nu)}$ der Differentialsysteme (Ẽ′.) *sind in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ holomorphe oder meromorphe Funktionen von a_λ.*

Um eine kurze Ausdrucksweise zur Verfügung zu haben, wollen wir die Differentialsysteme (Ẽ′.) mit (E′.) *verwandt* nennen und die Lösungssysteme $\tilde{B}_{ik}^{(\nu)}$, die aus $B_{ik}^{(\nu)}$ durch die Transformationen $\mathfrak{T}$ hervorgehen, als mit $B_{ik}^{(\nu)}$ *verwandte Lösungssysteme* bezeichnen.

Betrachten wir das Differentialsystem (A.) für $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$, d. h. also

das Differentialsystem ($A^{(0)}$.) der Nr. 3 des II. Teils (S. 116), und sei ($\tilde{A}^{(0)}$.) irgend ein mit ($A^{(0)}$.) zu derselben Klasse gehöriges und normiertes Differentialsystem von derselben Form; dann sind die Wurzeln der determinierenden Gleichungen von ($\tilde{A}^{(0)}$.) von der Form $r_2^{(\nu)} + g_i^{(\nu)}$, wo die $g_i^{(\nu)}$ ganze Zahlen bedeuten, deren Summe verschwindet. Zu diesen ganzen Zahlen gehört eine bestimmte Transformation $\mathfrak{T}$; wenden wir diese auf (A.) bzw. auf die $B_{ik}^{(\nu)}$ an, so erhalten wir ein mit $B_{ik}^{(\nu)}$ verwandtes Lösungssystem $\tilde{B}_{ik}^{(\nu)}$, das sich für $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ auf die Anfangsmatrizen des Differentialsystems ($\tilde{A}^{(0)}$.) reduziert. Daraus folgt, daß wir *alle* mit ($A^{(0)}$.) zu derselben Klasse gehörigen linearen und normierten Differentialsysteme erhalten, wenn wir wie folgt verfahren: Wir bilden die sämtlichen mit $(B_{ik}^{(\nu)})$ verwandten Lösungssysteme, wählen unter diesen diejenigen aus, die in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ holomorph sind, und setzen darin $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$. Mit diesen Systemen von Konstanten als Anfangsmatrizen bilden wir lineare Differentialsysteme von der Form ($A^{(0)}$.); dann gehören diese mit ($A^{(0)}$.) zu derselben Klasse, und jedes mit ($A^{(0)}$.) zu derselben Klasse gehörige lineare Differentialsystem von der Form ($A^{(0)}$.) ist unter ihnen enthalten.

Wir können nun sofort beweisen, *daß das Differentialsystem* (E′.) *stets solche Integralsysteme besitzt, die in dem beliebigen regulären Punkte* $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ *einen Pol haben.* Zu dem Ende stellen wir uns dasjenige mit (E′.) verwandte Differentialsystem ($\tilde{E}'$.) her, für das die in (6.) auftretenden ganzen Zahlen $g_i^{(\nu)}$ die folgenden Werte haben:

$$g_\alpha^{(\sigma+1)} = -1,\ g_1^{(\nu)} = 1,\ g_i^{(\mu)} = 0 \text{ für } \mu, i \neq \sigma+1, \alpha;\ \nu, 1.$$

Wir schreiben nun beliebige Anfangswerte $\tilde{\tilde{B}}_{ik}^{(\nu)}$ vor, die so beschaffen sind, daß in der Matrix $(\tilde{\tilde{B}}_{ik}^{(\nu)})^{-1}$ das Element mit den Indizes $\alpha, 1$ verschwindet. Durch diese ist ein in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ holomorphes Lösungssystem $(\tilde{B}_{ik}^{(\nu)})$ von ($\tilde{E}'$.) bestimmt. Wenden wir auf dieses Lösungssystem die Transformation $\mathfrak{T}(e_\alpha^{(\sigma+1)}, e_1^{(\nu)})$ an, so erhalten wir ein verwandtes Lösungssystem des Differentialsystems (E′.), das in $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ einen Pol hat. Dieser Satz zeigt uns eine erste wichtige Eigenschaft des Differentialsystems (E′.), die dieses System z. B. mit der *Riccati*schen Differentialgleichung gemein hat. Natürlich überträgt sich diese Eigenschaft sofort auf das System (B.).

In unseren bisherigen Betrachtungen haben wir uns auf eine gewisse Umgebung der Stelle $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ beschränkt. Wir wollen nun dazu

übergehen, das analytische Verhalten der Lösung des Systems (E′.) in der ganzen Ebene der komplexen Variabeln a_λ zu untersuchen. Wir können — um kein neues Gebilde konstruieren zu müssen — an die in II, 3 (S. 116) eingeführte Fläche T anknüpfen. Die Stellen

$$a_\lambda = a_\nu \quad (\nu \neq \lambda)$$

sind neben $a_\lambda = \infty$ *feste* singuläre Stellen unseres Differentialsystems. Um zu verhindern, daß a_λ diese umkreist, lassen wir a_λ in der Fläche T variieren; daß dabei a_λ durch den ausdehnbaren Faden l_λ an den unendlich fernen Punkt angehängt bleibt, stört die freie Veränderlichkeit dieser Variabeln offenbar in keiner Weise. *Es soll nun zunächst bewiesen werden, daß die Lösungen von* (E′.) *und folglich auch von* (B.) *innerhalb dieser Fläche T meromorph sind,* d. h. mit andern Worten, *daß die Differentialsysteme* (E′.) *und* (B.) *zwar verschiebbare Pole, aber keine verschiebbaren Verzweigungspunkte und keine verschiebbaren Unbestimmtheitsstellen besitzen.*

Wir gehen wieder von einem System von Anfangswerten (2.)

$$B_{ik}^{(\nu)} = \bar{B}_{ik}^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, \ldots \lambda-1, \lambda+1, \ldots n)$$

für $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ aus; die Größen (1.) seien ebenfalls fixiert. Dadurch ist ein Lösungssystem $B_{ik}^{(\nu)}$ von (E′.) determiniert, dessen Elemente in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ holomorph sind. Da, wie wir bewiesen haben, verschiebbare Pole vorhanden sind, so kann sich diese Umgebung nicht für alle möglichen Wahlen der Anfangswerte (2.) bis zu dem $a_\lambda^{(0)}$ am nächsten gelegenen Punkte a_ν $(\nu \neq \lambda)$ erstrecken. Denken wir uns also die $(B_{ik}^{(\nu)})$ längs eines innerhalb T verlaufenden Weges W analytisch fortgesetzt, so wird es auf diesem Wege im allgemeinen einen ersten Punkt $a_\lambda^{(1)}$ geben, wo die $B_{ik}^{(\nu)}$ aufhören holomorph zu sein. Aus der Form des Differentialsystems (E′.) und aus dem in II, 2 bewiesenen Satze*), daß die Determinanten $|B_{ik}^{(\nu)}|$ in der ganzen Fläche T endlich und von Null verschieden sind, folgt, daß die $B_{ik}^{(\nu)}$ in $a_\lambda = a_\lambda^{(1)}$ nur dann aufhören können holomorph zu sein, wenn sie in $a_\lambda^{(1)}$ entweder unendlich oder unbestimmt werden. Wir haben hiernach drei Fälle zu unterscheiden:

1. Die $B_{ik}^{(\nu)}$ werden in $a_\lambda^{(1)}$ unendlich, es gibt aber verwandte Lösungssysteme, die daselbst endliche Werte annehmen.

2. Die $B_{ik}^{(\nu)}$ werden in $a_\lambda^{(1)}$ unendlich und sämtliche verwandte Systeme werden in $a_\lambda^{(1)}$ unendlich oder unbestimmt.

*) Gleichung (15.), S. 115.

3. Die $B_{ik}^{(\nu)}$ werden in $a_\lambda^{(1)}$ unbestimmt und sämtliche verwandte Systeme werden daselbst ebenfalls unbestimmt oder unendlich.

Im ersten Falle haben die $B_{ik}^{(\nu)}$ in $a_\lambda^{(1)}$ einen Pol. Von den Fällen 2. und 3. wollen wir zeigen, daß sie unmöglich sind. Wir führen diesen Nachweis zuvörderst, indem wir uns auf die Lösbarkeit des *Riemann*schen Problems stützen.

Das lineare Differentialsystem (A.), dessen Anfangsmatrizen bei den singulären Punkten a_ν $(\nu \neq \lambda)$ die $B_{ik}^{(\nu)}$ sind und das überdies normiert, d. h. so beschaffen ist, daß die zu $x = \infty$ gehörige Anfangsmatrix gleich (δ_{ik}) ist, besitzt Integralmatrizen (y_{ik}), deren Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})$ an den Schnitten $l_1, \dots l_\sigma$ von a_λ unabhängig sind. Alle diese Integralmatrizen gehen aus einer derselben, etwa aus (y_{ik}) durch Substitutionen der Form

$$(\tau_{ik})\,(y_{ik})$$

hervor, wo die τ_{ik} von x und von a_λ unabhängige Konstanten sind (vgl. I, 2. S. 108). Zufolge der Lösbarkeit des *Riemann*schen Problems gibt es eine Funktionsmatrix (z_{ik}), die einem schlechthin kanonischen linearen Differentialsystem mit den singulären Punkten

$$a_1, \dots a_{\lambda-1}, a_\lambda^{(1)}, a_{\lambda+1}, \dots a_\sigma, \infty$$

genügt und die an den Schnitten $l_1, \dots l_\sigma$ die Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{ik}^{(1)}), \dots (\mathsf{A}_{ik}^{(\sigma)})$ erfährt. Wir normieren dieses lineare Differentialsystem in gewohnter Weise und bezeichnen seine Anfangsmatrizen mit $(\overline{\overline{B}}_{ik}^{(\nu)})$ und die Wurzeln seiner determinierenden Gleichungen mit $r_i^{(\nu)} + g_i^{(\nu)}$; dabei bedeuten die $g_i^{(\nu)}$ bestimmte ganze Zahlen, deren Summe verschwindet. Mit diesen ganzen Zahlen bilden wir die Ausdrücke (6.) und das Differentialsystem $(\tilde{\mathrm{E}}'.)$ und bestimmen dasjenige Lösungssystem $(\tilde{B}_{ik}^{(\nu)})$ dieses Differentialsystems, das für $a_\lambda = a_\lambda^{(1)}$ die Anfangswerte $(\overline{\overline{B}}_{ik}^{(\nu)})$ annimmt und in der Umgebung von $a_\lambda^{(1)}$ holomorph ist. In diese Umgebung fällt jedenfalls ein endliches Stück des in $a_\lambda^{(1)}$ mündenden Weges W. Es sei $a_\lambda^{(2)}$ ein Punkt dieses Wegstücks; dann sind in einer gewissen Umgebung von $a_\lambda^{(2)}$ sowohl die $(\tilde{B}_{ik}^{(\nu)})$ als auch die $(B_{ik}^{(\nu)})$ holomorph; diese beiden Systeme bilden also verwandte Lösungssysteme (vgl. die Bemerkung oben S. 136), und zwar geht $(\tilde{B}_{ik}^{(\nu)})$ aus $(B_{ik}^{(\nu)})$ durch diejenige Transformation $\mathfrak{T}$ hervor, die zu den ganzen Zahlen $g_i^{(\nu)}$ gehört. Daraus folgt aber, daß die $(B_{ik}^{(\nu)})$ in der Umgebung der Stelle $a_\lambda = a_\lambda^{(1)}$, wo die $(\tilde{B}_{ik}^{(\nu)})$ holomorph sind, ihrerseits auch holomorph

oder meromorph sein müssen, und damit ist die Unmöglichkeit der Fälle 2. und 3. dargetan.

Diese Unmöglichkeit kann auch auf folgende Weise erschlossen werden. Mit Hilfe von asymptotischen Darstellungen der Lösungen linearer Differentialsysteme als Funktionen eines in den Koeffizienten auftretenden Parameters habe ich*) bewiesen, daß, wenn in einem schlechthin kanonischen linearen Differentialsystem, bei festen Wurzeln der determinierenden Gleichungen, die Elemente der Anfangsmatrizen $B_{ik}^{(\nu)}$ unendlich werden, und zwar so, daß das gleiche auch für jedes zu derselben Klasse gehörige schlechthin kanonische Differentialsystem der Fall ist, alsdann auch die Elemente der Fundamentalsubstitutionen unendlich oder unbestimmt werden müssen**). Aus diesem Satze läßt sich auch die Unmöglichkeit der Fälle 2. und 3. erschließen, da ja in unserem Falle die $A_{ik}^{(\nu)}$ konstant sind. — Da nun aus diesem Satze in Verbindung mit dem Fundamentallemma der Beweis für die Lösbarkeit des *Riemann*schen Problems mit Hilfe der Kontinuitätsmethode folgt, so sieht man, daß die Heranziehung der Lösbarkeit des *Riemann*schen Problems zum Beweise der Eigenschaft des Differentialsystems (E′.) bzw. (B.), keine verschiebbaren Verzweigungs- und Unbestimmtheitsstellen zu besitzen, nichts Überflüssiges hereinbringt, sondern dem Wesen der Frage vollkommen entspricht.

2. Das qualitative Verhalten der Lösungen der Differentialsysteme (B.) und (E′.) in der Umgebung der festen Singularitäten.

Wenn wir für das System (E′.) von einem System der Konstanten (1.) und einem System von Anfangswerten $\overline{B}_{ik}^{(\nu)}$ für $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ oder für das System (B.) von einem System von Anfangswerten $\overline{A}_{ik}^{(\nu)}$ für $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ ausgehen, so folgt aus den Erörterungen der vorigen Nummer, daß die durch diese Daten als holomorphe Funktionen in einer gewissen Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ definierten Lösungen jener Differentialsysteme meromorph, also eindeutig bestimmt bleiben, so lange a_λ sich in der Fläche T bewegt. Es entsteht nun die Frage nach dem Verhalten dieser Lösungen, wenn a_λ

*) Mathem. Annalen Bd. 63, S. 273, 277 ff., Vorlesungen S. 268 ff., vgl. auch Jahresbericht der D. M.-V. XVIII (1909), S. 23, 24.

**) Ich setze zwar a. a. O. voraus, daß die singulären Punkte von dem Parameter μ, der die $B_{ik}^{(\nu)}$ ins Unendliche führt, unabhängig sind. Man sieht aber, wenn man den Gang der Untersuchung verfolgt, daß das Wesentliche des Resultats auch dann erhalten bleibt, wenn μ von einem singulären Punkte abhängt.

einen der festen singulären Punkte $a_1, \dots a_{\lambda-1}, a_{\lambda+1}, \dots a_\sigma, \infty$ umkreist, d. h. einen der Schnitte l_ν $(\nu \neq \lambda)$ überschreitet.

Zunächst ist klar, daß bei beliebiger Variabilität von a_λ die Exponenten $r_i^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \dots \sigma + 1;\ i = 1, 2, \dots n)$ keine Änderung erfahren; ebenso bleiben die Werte der Integrationskonstanten $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ fest, aber die Bedeutung der letzteren ändert sich insofern, als die $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ an die Lage der Schnitte $l_1, \dots l_\sigma$ gebunden sind. Wenn der an dem Faden l_λ angehängte Punkte a_λ einen der Punkte a_ν $(\nu \neq \lambda)$ zu umkreisen sich anschickt, so wird er bei seiner Bewegung den Schnitt l_ν vor sich her treiben, bis er wieder in seine Ausgangslage zurückgekehrt ist. Es werden also, wenn a_λ den Umlauf um a_ν $(\nu \neq \lambda)$ vollzieht, die Schnitte l_λ und l_ν in neue Lagen l'_λ, l'_ν übergeführt werden, während die übrigen Schnitte keine Änderung erfahren. Für dieses neue Schnittsystem haben dann die $(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \dots \sigma)$ dieselbe Bedeutung, die sie vor dem Umlauf für das ursprüngliche Schnittsystem hatten. Nach den von mir für diese Art von Betrachtungen angegebenen Methoden findet man, daß *nach* dem Umlauf zu den *ursprünglichen* Schnitten gewisse Kombinationen der $(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})$ gehören, die in meiner Arbeit*) zusammengestellt sind. Wenn bei einer Umkreisung des unendlich fernen Punktes im positiven Sinne der Schnitt l_h dem Schnitte l_λ vorhergeht, und der Schnitt l_k dem Schnitte l_λ nachfolgt, so lauten diese Kombinationen wie folgt:

für einen Umlauf von a_λ um a_h

$$(7.)\quad \begin{cases} (\bar{\mathsf{A}}_{ik}^{(h)}) = (\mathsf{A}_{ik}^{(h)})^{-1}(\mathsf{A}_{ik}^{(\lambda)})^{-1}(\mathsf{A}_{ik}^{(h)})(\mathsf{A}_{ik}^{(\lambda)})(\mathsf{A}_{ik}^{(h)}), \\ (\bar{\mathsf{A}}_{ik}^{(\nu)}) = (\mathsf{A}_{ik}^{(h)})^{-1}(\mathsf{A}_{ik}^{(\lambda)})^{-1}(\mathsf{A}_{ik}^{(h)})(\mathsf{A}_{ik}^{(\lambda)})(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})(\mathsf{A}_{ik}^{(\lambda)})^{-1}(\mathsf{A}_{ik}^{(h)})^{-1}(\mathsf{A}_{ik}^{(\lambda)})(\mathsf{A}_{ik}^{(h)}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\nu = h+1, \dots \lambda-1) \\ (\bar{\mathsf{A}}_{ik}^{(\lambda)}) = (\mathsf{A}_{ik}^{(h)})^{-1}(\mathsf{A}_{ik}^{(\lambda)})(\mathsf{A}_{ik}^{(h)}), \\ (\bar{\mathsf{A}}_{ik}^{(\mu)}) = (\mathsf{A}_{ik}^{(\mu)}); \qquad\qquad (\mu = \lambda+1, \dots \sigma, 1, \dots h-1) \end{cases}$$

für einen Umlauf von a_λ um a_k ergeben sich die entsprechenden Kombinationen aus den vorstehenden, indem man h, λ mit λ, k vertauscht. Bilden wir nun ein schlechthin kanonisches lineares Differentialsystem $(\bar{\mathrm{A}}.)$ mit den singulären Punkten $a_1, \dots a_\sigma$ und den Exponenten $r_i^{(\nu)}$, das in gewohnter Weise normiert ist, und das eine Integralmatrix besitzt, die an den Schnitten $l_1, \dots l_\sigma$ die Fundamentalsubstitutionen $(\bar{\mathsf{A}}_{ik}^{(\nu)})$ $(\nu = 1, \dots \sigma)$

*) Dieses Journal Bd. 124, S. 302, Gln. (7.), (7ª.).

erfährt, so sind die Anfangsmatrizen $(\overline{B}_{ik}^{(\nu)})$ dieses Differentialsystems diejenigen Werte, in die die $(B_{ik}^{(\nu)})$ durch den betreffenden Umlauf von a_λ übergegangen sind. Damit ist also das qualitative Verhalten der $B_{ik}^{(\nu)}$ in der Umgebung der festen singulären Punkte a_ν $(\nu \neq \lambda)$ vollkommen fixiert. *Wir können also die Integration der Differentialsysteme* (E′.) *bzw.* (B.) *im qualitativen Sinne als vollzogen ansehen.*

Eine *algorithmische* Integration dieser Systeme wird in dem Falle, *wo die* $r_i^{(\nu)}$ *reale Größen sind*, durch die *Poincaré*schen „séries zétafuchsiennes" geliefert. Denken wir uns nämlich die $n^2 \cdot \sigma$ Integrationskonstanten $(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})$ so gewählt, daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen

$$|\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}\omega| = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \sigma+1)$$

wo

$$(\mathsf{A}_{ik}^{(\sigma+1)}) = (\mathsf{A}_{ik}^{(1)})^{-1} \cdots (\mathsf{A}_{ik}^{(\sigma)})^{-1}$$

ist, sämtlich den absoluten Betrag Eins haben, so lassen sich die entsprechenden Lösungen der Differentialsysteme (E′.) in folgender Weise durch unendliche Reihen darstellen. Es bedeute g_ν die kleinste positive ganze Zahl, für die

$$(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})^{g_\nu} = (\delta_{ik}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \sigma+1) \tag{8.}$$

ist; wenn eine solche ganze Zahl nicht existiert, so werde $g_\nu = \infty$ gesetzt. Man bildet die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{g(x)}{(x-a_1)\cdots(x-a_\sigma)}\,u, \tag{9.}$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade $2\sigma - 2$ ist, und bestimmt die $2\sigma - 1$ Koeffizienten von $g(x)$ so, daß erstens die Differenzen der Wurzeln der zu $a_1, \ldots a_\sigma, \infty$ gehörigen determinierenden Gleichungen die Werte $\frac{1}{g_1}, \ldots \frac{1}{g_\sigma}, \frac{1}{g_{\sigma+1}}$ haben, und daß zweitens x eine *Fuchs*sche Funktion des Quotienten zweier linear unabhängiger Integrale u_1, u_2 ist. Eine solche Bestimmung ist nach *Poincaré* stets und nur auf eine Weise möglich. Es mögen nun die sämtlichen Substitutionen der aus den $(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})$ als Fundamentalsubstitutionen komponierten Gruppe in irgend einer Reihenfolge mit

$$(T_{ik}^{(0)}), (T_{ik}^{(1)}), (T_{ik}^{(2)}), \ldots \tag{10.}$$

bezeichnet werden; ferner seien

$$\begin{pmatrix}\alpha_0, \beta_0\\ \gamma_0, \delta_0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1\\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_2, \beta_2\\ \gamma_2, \delta_2\end{pmatrix}, \ldots \tag{11.}$$

die Substitutionen der Gruppe der Differentialgleichung (9.), und zwar in

der Reihenfolge, daß die Substitution $\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}$ der Substitution $(T_{ik}^{(\nu)})$ entspricht*). Bedeuten dann $\varphi_{ik}(u_1, u_2)$ n^2 geeignet gewählte rationale homogene Funktionen von u_1, u_2, so konvergieren die Reihen

$$(12.) \qquad (y_{ik}) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} (T_{ik}^{(\alpha)})^{-1} (\varphi_{ik}(\alpha_\alpha u_1 + \beta_\alpha u_2, \gamma_\alpha u_1 + \delta_\alpha u_2))$$

unbedingt und gleichmäßig und stellen eine Integralmatrix eines schlechthin kanonischen linearen Differentialsystems von der Form (A.) dar, die an den Schnitten l_ν die Substitution $(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})$ erfährt. Es seien $r_i^{(\nu)}$ die Wurzeln der determinierenden Gleichungen dieses Systems (A.) und $(c_{ik}^{(\nu)})$ die durch die Gleichungen (6.), (7.) von I, 1 (S. 102) bestimmten Matrizen. Dann sind (vgl. (5.) von I, 1) die Elemente der Matrizen

$$\left(\delta_{ik}(x - a_\nu)^{-r_i^{(\nu)}}\right)(c_{ik}^{(\nu)})^{-1}(y_{ik})$$

in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorph und reduzieren sich für $x = a_\nu$ auf die Lösungen $(B_{ik}^{(\nu)})$ des Differentialsystems (E'.), die den Integrationskonstanten $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ entsprechen. Damit hat man also in der Tat eine explizite Darstellung dieser Lösungen gefunden. Um die Werte zu erhalten, die diese Lösungen annehmen, wenn a_λ einen Umlauf um den festen singulären Punkt a_h vollzieht, hat man nur die $(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})$ durch die in (7.) angegebenen $(\overline{\mathsf{A}}_{ik}^{(\nu)})$ zu ersetzen.

3. Partikulare Lösungssysteme des Differentialsystems (E'.). Der Fall $n = 2$.

Bei spezieller Wahl der Integrationskonstanten $(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})$ erhalten wir partikulare Lösungssysteme $B_{ik}^{(\nu)}$ des Differentialsystems (E'.), die *eindeutige* Funktionen von a_λ sind. Die Bedingungen, die man zu diesem Zwecke den $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ auferlegen muß, habe ich in der oben erwähnten Abhandlung**) aufgestellt. Sie bestehen in Folgendem. Es gibt eine lineare Substitution $(\mathsf{B}_{ik}^{(h,\lambda)})$ von der Beschaffenheit, daß die durch die Gleichungen (7.) gegebenen $\overline{\mathsf{A}}_{ik}^{(\nu)}$ aus den $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ durch Transformation mit $(\mathsf{B}_{ik}^{(h,\lambda)})$ hervorgehen, also:

$$(\overline{\mathsf{A}}_{ik}^{(\nu)}) = (\mathsf{B}_{ik}^{(h,\lambda)})(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})(\mathsf{B}_{ik}^{(h,\lambda)})^{-1}. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \sigma)$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so erleiden die $B_{ik}^{(\nu)}$ keine Änderung,

---

*) d. h. aus den Fundamentalsubstitutionen, die u_1, u_2 an den Schnitten $l_1, \ldots l_\sigma$ erfahren, in derselben Weise komponiert ist, wie $(T_{ik}^{(\nu)})$ aus den $(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \ldots \sigma)$.

**) Dieses Journal, Bd. 124, S. 307 ff.

wenn a_λ den Punkt a_h umkreist. Ist diese Bedingung für *alle* a_h $(h \neq \lambda)$ erfüllt, so sind also die $B_{ik}^{(\nu)}$ allenthalben eindeutige Funktionen von a_λ, die aber im allgemeinen in den Punkten a_ν $(\nu \neq \lambda)$ und ∞ noch Unbestimmtheitsstellen (wesentlich singuläre Punkte) haben können. Wählen wir insbesondere die $A_{ik}^{(\nu)}$ als die Elemente der Fundamentalsubstitutionen einer *Pochhammer*schen Differentialgleichung*), so ergeben sich die $B_{ik}^{(\nu)}$ als *rationale* Funktionen von a_λ.

Wir beschäftigen uns endlich noch kurz mit dem in der Literatur auch von anderer Seite behandelten Falle $n = 2$.

Für das Differentialsystem in zwei Unbekannten

$$\text{(A.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 \dfrac{g_{11}(x)}{\varphi} + y_2 \dfrac{g_{21}(x)}{\varphi}, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 \dfrac{g_{12}(x)}{\varphi} + y_2 \dfrac{g_{22}(x)}{\varphi}, \end{cases}$$

wo $g_{ik}(x)$ ganze Funktionen vom Grade $\sigma - 1$ in x bedeuten und

$$\varphi = (x - a_1) \cdots (x - a_o)$$

ist, werde

$$\text{(13.)} \qquad z = h_1 y_1 + h_2 y_2$$

mit konstanten (von x unabhängigen) h_1, h_2 gesetzt. Dann genügt z einer homogenen linearen Differentialgleichung vom *Fuchs*schen Typus, für die

$$z_1 = h_1 y_{11} + h_2 y_{12},$$
$$z_2 = h_1 y_{21} + h_2 y_{22}$$

die Elemente eines Fundamentalsystems bilden, wenn (y_{ik}) eine Integralmatrix von (A.) ist. Die Determinante dieses Fundamentalsystems lautet:

$$z_1 \frac{dz_2}{dx} - z_2 \frac{dz_1}{dx} = e^{\int \frac{g_{11}+g_{22}}{\varphi} dx} \left[h_1 \frac{h_1 g_{21} - h_2 g_{11}}{\varphi} + h_2 \frac{h_1 g_{22} - h_2 g_{12}}{\varphi} \right],$$

so daß die außerwesentlich singulären Punkte jener Differentialgleichung zweiter Ordnung durch die Wurzeln der Gleichung

$$\text{(14.)} \qquad h_1^2 g_{21} + h_1 h_2 (g_{22} - g_{11}) - h_2^2 g_{12} = 0$$

geliefert werden. Die Anzahl derselben ist also im allgemeinen gleich $\sigma - 1$; sie kann auf $\sigma - 2$ reduziert werden, wenn man die Konstanten h_1, h_2 so wählt, daß der Koeffizient von $x^{\sigma-1}$ in der Gleichung (14.) verschwindet. Während für unbestimmte h_1, h_2 die Wurzeln der determinierenden Gleichungen der Differentialgleichung für z mit denen des Systems (A.) über-

*) Vgl. a. a. O., S. 316 ff.

einstimmen, ergeben sich durch die gedachte spezielle Bestimmung der h_1, h_2 *zwei* z, für die die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Gleichungen die Werte

$$r_1^{(\sigma+1)} + 1,\ r_2^{(\sigma+1)} \text{ bzw. } r_1^{(\sigma+1)},\ r_2^{(\sigma+1)} + 1$$

besitzen. Die Herren *Richard Fuchs* und *René Garnier* haben nun die Differentialgleichungen aufgestellt, denen diese außerwesentlich singulären Punkte $\lambda_1, \ldots \lambda_{\sigma-2}$ als Funktionen von a_λ genügen müssen, damit die Gruppe der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, der z genügt, von a_λ unabhängig ist*). Mit Hilfe der Gleichung (14.) können diese Differentialgleichungen aus unserem Differentialsystem (B.)**) hergeleitet werden. Unsere Integrationstheorie der Differentialsysteme (B.) bzw. (E′.) umfaßt somit die Differentialgleichungen von *R. Fuchs* und *R. Garnier*. Die von *R. Fuchs* aufgestellte Differentialgleichung ist von der zweiten Ordnung; sie ist in den Tabellen, die Herr *Painlevé****) für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen kritischen Punkten aufgestellt hat, nicht enthalten. Später hat Herr *Gambier*†) die Tabellen des Herrn *Painlevé* vervollständigt und die von Herrn *R. Fuchs* gefundene Differentialgleichung in dieselben eingeordnet. Herr *Painlevé* hat dann††) mit den ihm eigentümlichen Methoden nachgewiesen, daß jene Differentialgleichung feste kritische Punkte besitzt†††), und daß sie insofern als die allgemeinste Differentialgleichung zweiter Ordnung von dieser Beschaffenheit angesehen werden kann, als sich alle übrigen aus ihr durch einen Grenzübergang

---

*) *R. Fuchs*, Comptes Rendus t. 141 (1905), p. 555, Math. Ann. 63, S. 301, für $\sigma = 3$; *R. Garnier*, Comptes Rendus, t. 151 (1910), p. 205, Thèses, Paris, 1911, troisième partie, p. 73 ff. für ein beliebiges σ.

**) Ich habe das Differentialsystem (B.) zuerst im Bd. 129 (*Dirichlet*-Band, 1905/06) dieses Journals, S. 292—293 veröffentlicht.

***) Acta Math., Bd. 25, S. 1 ff.

†) Comptes Rendus, t. 142 (1906), p. 268, 1403, 1497; t. 143 (1906), p. 741, vgl. Acta Math., 33, S. 1 ff.

††) Comptes Rendus, t. 143 (1906), p. 1111.

†††) Daß dies der Fall sei, hat Herr *R. Fuchs*, Math. Ann. 63, S. 308 Fußnote angedeutet und Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft IX (1910), S. 78 auf Grund meiner Sätze (dieses Journal Bd. 124, S. 292 ff.) erhärtet. Sein Beweis erfordert nur insofern eine Ergänzung, als das Auftreten beweglicher Pole dabei unberücksichtigt geblieben ist.

herleiten lassen. Unser Differentialsystem (B.) begreift also in diesem Sinne alle Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung mit festen kritischen Punkten von der Form, wie sie *Painlevé* untersucht hat, in sich, und es sprechen manche Anzeichen dafür, daß es auch für eine *beliebig hohe* Ordnung eine ähnliche Bedeutung besitzt.

Inhaltsübersicht.

		Seite
Einleitung		96
I. Teil.	Das *Fuchs*sche Problem	
	1. Aufstellung der Differentialgleichungen für die Integralmatrix und die Residuen	101
	2. Bedingungen dafür, daß eine Integralmatrix von (A.) dem System (C.) genügt	106
II. Teil.	Integralgleichungen des Differentialsystems (B.).	
	1. Die algebraischen Integralgleichungen	109
	2. Formulierung des Integrationsproblems für das Differentialsystem (B.)	113
	3. Die allgemeinen Integralgleichungen des Differentialsystems (B.)	116
III. Teil.	Die Eigenschaften der meromorphen Funktionen $G_{ik}^{(\nu)}$	
	1. Der Automorphismus der Funktionen $G_{ik}^{(\nu)}$	119
	2. Aufstellung der Fundamentaltransformationen der Gruppe T. Vorbereitendes	123
	3. Fortsetzung. Eine Aufgabe der analytischen Geometrie des Raumes. Aufstellung der Transformation des ersten Typus	126
	4. Fortsetzung, Andere Normierung des Differentialsystems. Aufstellung der Transformation des zweiten Typus	132
IV. Teil.	Funktionentheoretische Diskussion des Differentialsystems (B.).	
	1. Beweis, daß das System (B.) bis auf verschiebbare Pole nur feste singuläre Punkte besitzt	134
	2. Das qualitative Verhalten der Lösungen der Differentialsysteme (B.) und (E′.), in der Umgebung der festen Singularitäten	139
	3. Partikulare Lösungssysteme des Differentialsystems (E′.). Der Fall $n = 2$; Beziehungen zu den Arbeiten von *R. Fuchs*, *R. Garnier* und *P. Painlevé*	142

Über die Theorie der biquadratischen Reste.

Von Herrn *E. Busche* in Hamburg.

§ 1.

Der folgende elementare Beweis des biquadratischen Reziprozitätsgesetzes im Körper $K(\sqrt{-1}) = K(i)$ unterscheidet sich von meinem früheren Beweise*) zu seinem Vorteil unter anderem dadurch, daß er ein genaues Analogon zu der *Zeller*schen Umformung**) des dritten *Gauß*schen Beweises für das quadratische Gesetz ist. Diesen Beweis will ich zuerst in einer solchen Form darstellen, daß die Analogie deutlich hervortritt.

Der mod. 2 zu nehmende quadratische Charakter $D(m, n)$ der positiven Zahl m in bezug auf die ungerade zu ihr teilerfremde positive Zahl n ist nach dem von *E. Schering* verallgemeinerten *Gauß*schen Lemma gleich der Anzahl der Produkte xm $(x = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1))$, die zwischen einem ungeraden und dem darauf folgenden geraden Vielfachen von $\frac{1}{2}n$ liegen. Es werde m ungerade und $< n$ vorausgesetzt. Um jeden der $\frac{1}{2}(m-1)$ auf der Strecke von 0 bis $\frac{1}{2}mn$ liegenden Punkte yn als Mittelpunkt grenze man ein Intervall von der Länge m ab, am Nullpunkt ein solches von der Länge $\frac{1}{2}m$, in dem also kein xm liegt. Ist dann $D_\mu(m, n)$ der Beitrag der $\frac{1}{2}(m-1)$ Punkte xm, von denen je einer in einem solchen Intervall liegt, zu $D(m, n)$, so ist

$$D_\mu(m, n) + D(n, m) = \tfrac{1}{2}(m-1), \tag{1.}$$

denn je nachdem ein solches xm vor dem zugehörigen yn oder hinter ihm liegt, trägt xm zu $D_\mu(m, n)$ 1 oder 0, yn zu $D(n, m)$ 0 oder 1 bei.

Nun denke man sich die Intervalle von der Länge m, bzw. $\frac{1}{2}m$ aus der Strecke von 0 bis $\frac{1}{2}mn$ entfernt und die m übrig bleibenden

*) Dieses Journal, Bd. 99.

**) Monatsberichte d. K. Preuß. Akad., Berlin, 1872.

Intervalle von der Länge $\frac{1}{2}(n-m)$ wieder aneinander gerückt, so daß der Mittelpunkt M des mittelsten von ihnen an seiner Stelle bleibt und auch die Punkte xm unverändert unter den bewegten Strecken liegen bleiben. Dann sind die xm auf die $\frac{1}{2}(n-m)$-Intervalle ebenso verteilt wie vor der Veränderung, und zwar liegen sie symmetrisch zu M, so daß

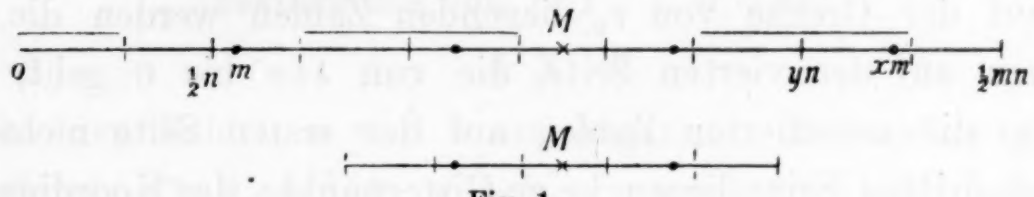


Fig. 1.

ihr Beitrag $R = D(m,n) - D_\mu(m,n)$ zu $D(m,n)$ sich auf den des Punktes M beschränkt. Dieser Punkt ist nämlich

$$M = \frac{1}{2}(m+1)\cdot\frac{n}{2} - \frac{n-m}{4} = \frac{n+1}{4}m,$$

wenn $m \equiv 1 \pmod 4$ ist, da dann das mittelste $\frac{1}{2}(n-m)$-Intervall mit dem ungeraden Vielfachen $\frac{1}{4}(m+1)n$ von $\frac{1}{2}n$ endigt, und

$$M = \frac{1}{2}(m-1)\cdot\frac{n}{2} + \frac{n-m}{4} = \frac{n-1}{4}m,$$

wenn $m \equiv -1 \pmod 4$ ist, da dann jenes Intervall mit einem ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}n$ beginnt. Der Punkt M ist also ein Vielfaches von $\frac{1}{2}m$, woraus die symmetrische Verteilung folgt. Der Beitrag E von M ist nur dann von Null verschieden, wenn M ein Vielfaches von m ist und zugleich in einem mit einem ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}n$ beginnenden $\frac{1}{2}(n-m)$-Intervall liegt, also wenn zugleich $n \equiv 1$ und $m \equiv -1 \pmod 4$ ist. Da nun

$$D(m,n) + D(n,m) \equiv R + D_\mu(m,n) + D(n,m) \equiv E + \tfrac{1}{2}(m-1) \pmod 2$$

ist, so ist diese Summe nur dann ungerade, wenn m und n beide $\equiv -1 \pmod 4$ sind.

Dieser Beweis wird durch Fig. 1 veranschaulicht, wo $m = 5$, $n = 9$ ist und die herausgenommenen Strecken überstrichen sind.

§ 2.

Um den Beweis auf die biquadratischen Reste zu übertragen, definiere ich den mod. 4 zu nehmenden biquadratischen Charakter $D(m,n)$ der Zahl $m = c + di$ in bezug auf die zu ihr teilerfremde ungerade Zahl $n = a + bi$ nach *Gauß* (Ges. Werke, Bd. II, S. 317) folgendermaßen: Die Ebene der

komplexen Zahlen wird mit dem m-Gitter der durch m teilbaren Zahlen und mit dem $\frac{1}{2}n$-Gitter der Vielfachen von $\frac{1}{2}n$ überzogen. In dem Quadrat $\nu_0 = (0, \frac{1}{2}n, \frac{1}{2}(1+i)n, \frac{1}{2}in)$ liegt ein Viertelsystem ν_0 des Moduls n, d. h. ein System von Zahlen, das keine zwei mod. n assoziierte Zahlen, aber zu jeder nicht durch n teilbaren Zahl eine mod. n assoziierte enthält. Von den auf der Grenze von ν_0 liegenden Zahlen werden die von Null verschiedenen auf der vierten Seite, die von $\frac{1}{2}in$ bis 0 geht, zu ν_0 gerechnet, also die assoziierten Zahlen auf der ersten Seite nicht; auf der zweiten und dritten Seite liegen keine Gitterpunkte des Koordinatengitters. Mit ν_0 sind die Viertelsysteme ν_h assoziiert, die sich aus ν_0 durch Drehung um den Nullpunkt durch h rechte Winkel ergeben. Ein mit ν_h mod. n kongruentes Viertelsystem wird auch mit ν_h bezeichnet, und auch sonst werden Bereiche oder in ihnen liegende Systeme von Zahlen, die mod. n kongruent sind, in der Bezeichnung nicht unterschieden. Es ist $\nu_{h'} = \nu_h$, wenn $h' \equiv h \pmod 4$ ist. Aus ν_0 wird durch eine Ähnlichkeitstransformation, die 0 unverändert läßt und 1 in m überführt, der quadratische Bereich $m\nu_0 = \nu_0 m = (0, \frac{1}{2}mn, \ldots)$ abgeleitet. Er zerfällt durch das $\frac{1}{2}n$-Parallelengitter in Quadrate ν_h und Stücke von solchen und enthält $\frac{1}{4}(a^2+b^2-1)$ Punkte zm des m-Punktgitters. Nennt man h die ν_h-Charakteristik des Punktes zm, wenn er in ν_h liegt, so ist $D(m, n)$ die Summe aller ν_h-Charakteristiken der Zahlen zm in $m\nu_0$.

Aus dieser Definition ergeben sich unmittelbar die elementaren Eigenschaften des Zeichens $D(m, n)$: Es ist mod. 4

$$D(m, ni) \equiv D(m, n), \quad D(mi, n) \equiv D(m, n) + \tfrac{1}{4}(a^2+b^2-1),$$
$$D(\overline{m}, \overline{n}) \equiv -D(m, n),$$

wenn $\overline{m}$ die konjugierte Zahl zu m ist.

Die Schwierigkeiten, die beim Beweise des Reziprozitätsgesetzes zu überwinden sind, beruhen darauf, daß das m-Gitter dem $\frac{1}{2}n$-Gitter nicht parallel ist. Die Anordnung der zm in den ν_h ist durchaus nicht regelmäßig, und die Grenze von $m\nu_0$ zerschneidet einen Teil der ν_h. Daher ist es notwendig, an Stelle der ν_h andere Viertelsysteme ν'_h einzuführen, die dem m-Gitter möglichst angepaßt sind, und auch den Bereich $m\nu_0$ durch einen anderen Bereich $m\nu''_0$ zu ersetzen, der außer ganzen ν'_h nur einfach gestaltete Teile der ν'_h enthält. Diese Maßnahmen genügen zur Herleitung des Ergänzungssatzes für $1+i$; beim Reziprozitätsgesetz kommt dann noch

eine durch § 1 nahegelegte Zerlegung der ν'_h und die entsprechende Veränderung durch Herausnahme von gewissen Streifen mit der Breite $|m|$, sowie der Nachweis der Symmetrie der zm in den übrigbleibenden Bereichen hinzu.

Bestimmung von $D(1+i, a+bi)$.

§ 3.

Eine der Zahlen a und b ist ungerade, die andere gerade. Es werde zunächst $a>0$, $b \gtrless 0$, $a>b$ vorausgesetzt; $1+i$ werde mit m bezeichnet. Den Modul 4 bei einer Kongruenz lasse ich meistens fort.

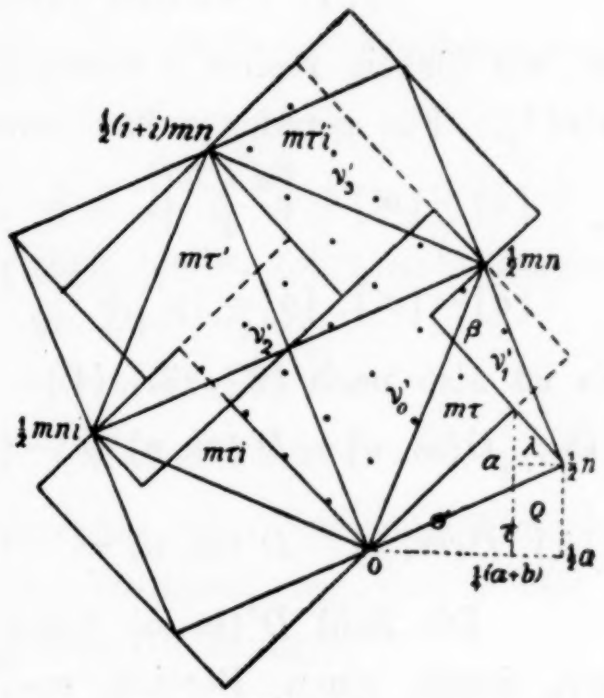


Fig. 2.

Aus ν_0 wird ν'_0 dadurch abgeleitet, daß man das Dreieck $\alpha=(0, \frac{1}{2}n, \frac{1}{4}(a+b)m)$ an der ersten Seite von ν_0 subtrahiert und dafür αi an der vierten Seite addiert. Vgl. Fig. 2, wo $a+bi=9+4i$ ist. Ebenso werden die mit α kongruenten Dreiecke β und βi^{-1} an der zweiten und dritten Seite subtrahiert und addiert. Die Bereiche $\nu'_h=\nu'_0 i^h$ enthalten dann wieder Viertelsysteme. Da ein zm in einem αi^h in ν'_{h-1} und ein zm in βi^h in ν'_{h+1} liegt, und da einem Gitterpunkt in α bzw. β in $m\nu_0$ ein zm in einem αi^h bzw. βi^h entspricht, so ist

$$D(m,n)-D'(m,n)\equiv[\alpha]-[\beta], \tag{2.}$$

wenn $D'(m,n)$ die Summe der ν'_h-Charakteristiken der zm in $m\nu_0$ ist und durch eine eckige Klammer die Anzahl der in dem eingeschlossenen Bereiche liegenden Gitterpunkte bezeichnet wird.

Man zerlege α durch die punktierten Linien der Fig. 2 in $\sigma+\varrho+\lambda-\tau$, so daß

$$[\alpha]=[\sigma]-[\tau]+[\varrho]+[\lambda] \tag{3.}$$

ist, und setze entsprechend

$$[\beta]=[\beta i^{-1}]=[\sigma']-[\tau']+[\varrho']+[\lambda'], \tag{4.}$$

wo σ' etc. aus σ etc. durch Verschiebung um $\frac{1}{2}ni$ hervorgehen. Die auf

der reellen Achse liegenden Gitterpunkte gehören nicht zu σ, τ, ϱ, die auf den Hypotenusen von σ und τ liegenden zu σ und τ. Für ungerades a liegen auf der gemeinsamen Seite von ϱ und λ Gitterpunkte, die zu ϱ gerechnet werden, auf der Hypotenuse von λ' solche, die zu λ' gehören sollen. Für gerades a liegen auf der rechten vertikalen Seite von ϱ Gitterpunkte, die zu ϱ gehören, auf den horizontalen Seiten von σ', τ', ϱ' und auf der Hypotenuse von λ' solche, die nicht zu diesen Bereichen gerechnet werden. Hiernach ist sofort ersichtlich, daß für ungerades a

$$[\sigma]=[\sigma'],\ [\varrho]=[\varrho'],\ [\lambda]=[\lambda']-\frac{a-1}{2}+\left[\frac{a+b}{4}\right]$$

ist, wo für ein reelles x durch $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqq x$ angegeben wird*). Für gerades a hat man

$$[\sigma]=[\sigma']+\left[\frac{a+b}{4}\right],\ [\varrho]=[\varrho'],\ [\lambda]=[\lambda'], \qquad (a+b\equiv 1)$$

$$[\sigma]=[\sigma'],\ [\varrho]=[\varrho']+\frac{b-1}{2},\ [\lambda]=[\lambda']+\frac{a-b-1}{4}. \qquad (a+b\equiv 3)$$

Es ist also nach (2.), (3.), (4.)

$$(5.)\quad D(m,n)-D'(m,n)\equiv -[\tau]+[\tau']-\frac{a-1}{2}+\left[\frac{a+b}{4}\right], \quad (a \text{ ungerade})$$

$$(6.)\quad D(m,n)-D'(m,n)\equiv -[\tau]+[\tau']+\left[\frac{a+b}{4}\right]. \qquad (a \text{ gerade})$$

Die Zahl $D'(m,n)$ kann nicht berechnet werden. Es wird daher $m\nu_0$ durch einen Bereich $m\nu_0''$ ersetzt, der aus $m\nu_0$ durch Addition und Subtraktion von $m\tau$ und $m\tau i$, bzw. $m\tau' i$ und $m\tau'$ abgeleitet wird; er ist in der Fig. 2 durch die in ihm liegenden zm gekennzeichnet. Da die Charakteristik eines in $m\tau i$ liegenden zm um 1 größer, die eines in $m\tau'$ liegenden um 1 kleiner ist als die des homologen zm in $m\tau$ und $m\tau' i$, und da die Anzahl der zm in $m\tau$ gleich $[\tau]$ ist, so ist

$$(7.)\qquad D'(m,n)-D''(m,n)\equiv[\tau]-[\tau'],$$

wo $D''(m,n)$ die Summe der ν_h'-Charakteristiken der zm in $m\nu_0''$ bedeutet.

*) Die Festsetzungen über die Gitterpunkte auf den Grenzen der Bereiche sind deshalb in der angegebenen Weise getroffen worden, damit die Formeln auch für $b=0$ anwendbar bleiben. Für ungerades a ist

$$[\tau]=\sum_{x=1}^{\frac{1}{2}(a-1)}\left[\frac{bx}{a}\right]$$

und wird $=0$ für $b=0$. Die Theorie dieser *Gauß*schen Funktion $\varphi(a,b)$ wird hier — im Gegensatz zu dem *Gauß*schen Beweise (Ges. W. Bd. II, S. 143 ff.) — nicht benutzt.

Diese Zahl kann nun unmittelbar durch Abzählung der in den ν'_h liegenden zm gefunden werden. Dabei kommt nur je ein rechteckiges Stück eines ν'_1, ν'_2, ν'_3 in Betracht, deren leicht bestimmbare Seitenlängen aus der nachstehenden Formel zu ersehen sind. Man erhält

$$D''(m,n) \equiv \left[\frac{b}{2}\right]\cdot\left(\left[\frac{a}{2}\right]-\left[\frac{a+b}{4}\right]\right)+2\cdot\frac{a-b+1}{2}\cdot\left(\left[\frac{a}{2}\right]-\left[\frac{a+b}{4}\right]\right)$$
$$+3\cdot\left[\frac{b}{2}\right]\cdot\left(\left[\frac{a}{2}\right]+\left[\frac{b}{2}\right]-\left[\frac{a+b}{4}\right]\right)$$

oder

$$(8.)\qquad D''(m,n) \equiv (a-b+1)\cdot\left(\left[\frac{a}{2}\right]-\left[\frac{a+b}{4}\right]\right)-\left[\frac{b}{2}\right]^2.$$

Für ein *ungerades* a folgt aus (5.), (7.), (8.) *der Ergänzungssatz für* $1+i$:

$$(9.)\qquad D(1+i, a+bi) \equiv (a+b)\cdot\left(\frac{a-1}{2}-\left[\frac{a+b}{4}\right]\right)-\frac{b^2}{4} \pmod 4.$$

Daß diese Formel auch für $a<b$ richtig bleibt, folgt leicht daraus, daß nach den elementaren Eigenschaften von $D(m,n)$

$$D(1+i, a+bi) \equiv D(1+i, -b+ai) \equiv -D(1-i, -b-ai)$$
$$\equiv -D(1+i, b+ai)+\frac{a^2+b^2-1}{4}$$

und $D(1+i, b+ai)$ nach (6.), (7.), (8.) bekannt ist. Auf ganz ähnliche Weise befreit man sich nachträglich von der Voraussetzung, daß a und b nicht negativ sein sollten, wobei man von den Gleichungen

$$\left[\frac{-a-b}{4}\right]=-\left[\frac{a+b}{4}\right]-1,\ \left[\frac{a-b}{4}\right]=\left[\frac{a+b}{4}\right]-\frac{b}{2},\ \left[\frac{-a+b}{4}\right]=-\left[\frac{a+b}{4}\right]+\frac{b}{2}-1$$

Gebrauch macht. Wenn $a+bi$ primär ist, d. h. $a+b\equiv 1$, so geht die rechte Seite von (9.) in den *Gauß*schen Ausdruck $\frac{1}{4}(a-b-1-b^2)$ über.

Das Reziprozitätsgesetz.

§ 4.

Es werden die reellen Bestandteile von $m=c+di$ und $n=a+bi$ ungerade, die imaginären gerade und $|m| \lessgtr |n|$ angenommen. Da man wegen der parallelen Gitter sehr leicht zeigt, daß $D(c,a)\equiv 0$ ist, kann man festsetzen, daß b und d nicht beide $=0$ sind, also $ad-bc\neq 0$ ist. Ferner wird zunächst $a\equiv c$ und $c>0$, $d\gtrless 0$ vorausgesetzt.

Der Bereich ν'_0 wird aus ν_0 der Gleichung $\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}(n-m)$ entsprechend durch Subtraktion des Dreiecks $\alpha=(0, \frac{1}{2}m, \frac{1}{2}n)$ an der

ersten und Addition von αi an der vierten Seite und entsprechende Subtraktion und Addition kongruenter Dreiecke β und βi^{-1} an der zweiten und dritten Seite abgeleitet. Die Bereiche α und β vom Flächeninhalt $\frac{1}{4}(ad-bc)$ können positiv oder negativ sein. Ein negativer Bereich wird

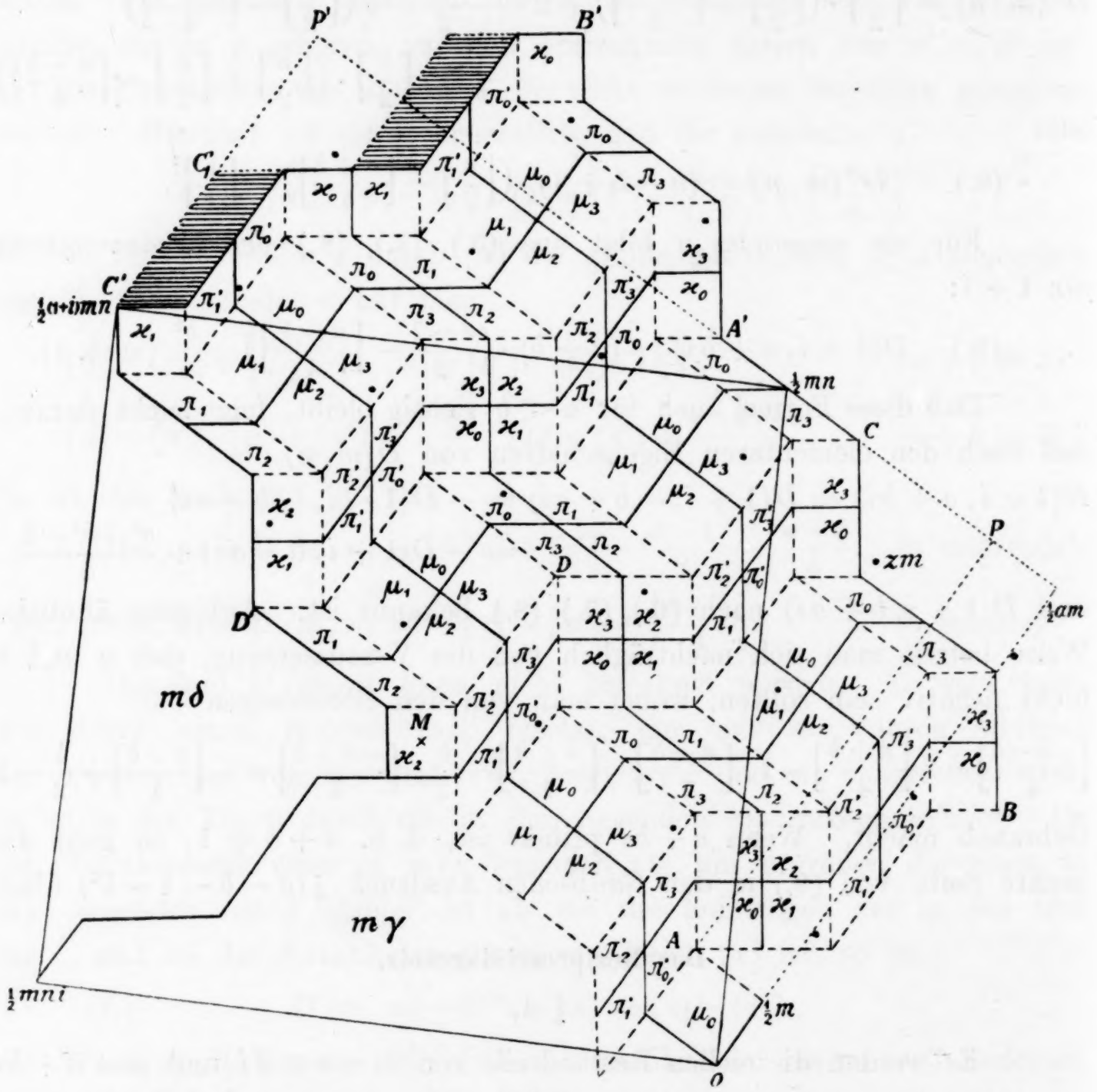


Fig. 3.

daran erkannt, daß die durch die Reihenfolge der Eckpunkte bestimmte Umlaufsrichtung seines Umfanges negativ ist. Die Klammerzahl eines negativen Bereiches gibt die negative Anzahl seiner Gitterpunkte an. In der Fig. 3 ($m=3+4i$, $n=7+4i$, α positiv) sind die Grenzen der ν_h' ausgezogen, die ν_h nicht angegeben.

Es kann vorkommen, daß die von ν_0 abzuschneidenden Bereiche sich teilweise überdecken, dann nämlich, wenn $P = ac + bd - c^2 - d^2 < 0$ ist. Der Kürze wegen möge dieser Fall vorläufig ausgeschlossen bleiben (vgl. § 9).

Es ist wieder

$$(10.) \qquad D(m,n) - D'(m,n) \equiv [\alpha] - [\beta],$$

wo $D'(m,n)$ die Summe der ν'_h-Charakteristiken der zm in $m\nu_0$ ist. Man setze

$$(11.) \qquad [\alpha] = [\sigma] - [\tau] + [\varrho] + [\lambda], \quad \sigma = (0, \tfrac{1}{2}c, \tfrac{1}{2}m),$$
$$\tau = (0, \tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}n), \ \varrho = (\tfrac{1}{2}c, \tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}di, \tfrac{1}{2}m), \ \lambda = (\tfrac{1}{2}m, \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}di, \tfrac{1}{2}n).$$

In der Fig. 3 reduziert sich λ wegen $b = d$ auf eine Strecke. Die auf der reellen Achse liegenden Grenzen sind als unendlich wenig oberhalb der Achse verlaufend zu denken, so daß die Gitterpunkte auf ihr z. B. nur dann zu τ gehören, wenn $b < 0$ ist. Die Strecken von 0 bis $\frac{1}{2}m$ und von 0 bis $\frac{1}{2}n$ müssen nach § 2 als links von ihren Gitterpunkten liegend angesehen werden. Die gemeinsame Seite von ϱ und λ verlaufe oberhalb ihrer Gitterpunkte. Von den auf der Hypotenuse von λ liegenden Gitterpunkten, die wegen $a \equiv c$ immer in gerader Anzahl vorhanden sind*), wird die Hälfte zu λ gerechnet, so daß $[\lambda]$ als die Hälfte der Gitterpunkte eines Rechtecks berechnet werden kann. Dann ist

$$(12.) \qquad [\varrho] = \frac{a-c}{2} \cdot \frac{d}{2}, \quad [\lambda] = \frac{a-c}{4} \cdot \left(\frac{b-d}{2} - 1\right);$$

in dem Beispiel ist $[\lambda] = -1$.

Ebenso wird $[\beta]$ gefunden, und zwar am bequemsten aus βi^{-1}, da dann σ' etc. durch Addition von $\frac{1}{2}ni$ zu jedem Eckpunkt aus σ etc. hervorgehen. Es ist

$$(13.) \qquad [\beta] = [\sigma'] - [\tau'] + [\varrho'] + [\lambda'],$$

$$(14.) \qquad [\varrho'] = [\varrho], \quad [\lambda'] = \frac{a-c}{4} \cdot \frac{b-d}{2}.$$

Nach (10.) bis (14.) erhält man

---

*) Diese Anzahl ist nur dann von Null verschieden, wenn $\frac{1}{2}(b-d)$ eine höhere Potenz von 2 enthält als $\frac{1}{2}(a-c)$, und dann gleich dem größten gemeinsamen Teiler dieser Zahlen. Die gleich zu erwähnende entsprechende Anzahl bei λ' ist von Null verschieden, wenn $\frac{1}{2}(b-d)$ dieselbe Potenz von 2 enthält wie $\frac{1}{2}(a-c)$. Vgl. meine Arbeit in diesem Journal, B. 136, S. 44.

$$(\text{I.}) \quad D(m,n) - D'(m,n) \equiv [\sigma] - [\sigma'] - [\tau] + [\tau'] - \frac{a-c}{4}.$$

Die Bereiche ν'_h werden in Teilbereiche zerlegt, indem man gemäß der identischen Gleichung

$$\tfrac{1}{4}(a^2+b^2) = \tfrac{1}{4}(c^2+d^2) + \tfrac{1}{4}((a-c)^2+(b-d)^2) + 2\cdot\tfrac{1}{4}(ac+bd-c^2-d^2)$$

$$\nu'_h = \mu_h + \varkappa_h + \pi_h + \pi'_h$$

setzt. Die Quadrate μ_h, deren Seiten dem m-Gitter parallel sind, bilden zu je 4 ein Quadrat M mit der Seite $|m|$, 4 Quadrate $\varkappa_h$ ein Quadrat mit der Seite $|n-m|$, 4 Parallelogramme π_h bzw. π'_h je ein Parallelogramm mit den Seiten $|m|$ und $|n-m|$. Die Mittelpunkte von M und den übrigen Figuren sind der Reihe nach Punkte zn, $(z+\frac{1}{2}(1+i))n$, $(z+\frac{1}{2})n$, $(z+\frac{1}{2}i)n$. Die Parallelogramme π_h und π'_h sind negativ, wenn $P = ac+bd-c^2-d^2 < 0$ ist, was vorläufig ausgeschlossen wurde. Weil m und n relativ prim sind, ist $P \neq 0$. (In der Figur ist M ein Punkt.)

In Fig. 3 sind die Zerlegungslinien der ν'_h gestrichelt. Nach den Festsetzungen über λ und λ' ist die eine Hälfte einer Strecke von der Länge $|\frac{1}{2}(n-m)|$ als links, die andere als rechts von ihren Gitterpunkten verlaufend zu denken. In der Mitte einer solchen Strecke liegt wegen $a \equiv c$ kein Gitterpunkt. Die Figur zeigt, daß die Ebene durch die Zerlegungslinien einerseits in abwechselnde mi- und $(n-m)i$-Streifen, andererseits in m- und $(n-m)$-Streifen zerlegt wird. Ein m-Streifen liegt z. B. links von der gebrochenen Linie AD der Fig. 3.

§ 5.

Bei der Herleitung von $m\nu''_0$ aus $m\nu_0$ ist der leitende Gedanke der, daß in $m\nu''_0$ nur ganze Bereiche $\mu_h, \varkappa_h, \pi_h, \pi'_h$ und, abgesehen von einem μ_0 am Nullpunkt, nur ganze M vorkommen sollen. Daher werden die aus Fig. 3 ersichtlichen Bereiche $m\gamma$ und $m\delta$ an der vierten und dritten Seite von $m\nu_0$ abgeschnitten und dafür $m\gamma i^{-1}$ und $m\delta i$ an der ersten und zweiten Seite addiert. Der Bereich $m\gamma$ besteht in der Figur aus einem größeren positiven Stück und einem kleinen negativen Dreieck. Es ist, wenn $D''(m,n)$ die Summe der ν'_h-Charakteristiken der zm in $m\nu''_0$ bedeutet,

$$(15.) \qquad D'(m,n) - D''(m,n) = [\gamma] - [\delta].$$

Die Zahl $[\gamma]$ ist die Anzahl der zm in

$$m\gamma i^{-1} = (0, \tfrac{1}{2}m, A, B, C, \tfrac{1}{2}mn),$$

wo $A=\frac{1}{2}(1+i)m$, $B=\frac{1}{2}cn+\frac{1}{2}mi$, $C=\frac{1}{2}mn-\frac{1}{2}mi$ ist, und die Grenzlinien AB, BC gebrochene Linienzüge sind. Ebenso ergibt sich $[\delta]$ aus

$$m\delta i=(\tfrac{1}{2}mn, A', B', C'),$$

wo die Bedeutung der Buchstaben, ebenso wie die von D und D' aus der Figur zu entnehmen ist. Die Bereiche $ABCD$ und $A'B'C'D'$ — ich lasse die Klammern weg — mögen als Rechtecke bezeichnet werden. Durch Zerlegung findet man

$$m\gamma i^{-1}=(0, \tfrac{1}{2}am, \tfrac{1}{2}mn)+(\tfrac{1}{2}m, A, P, \tfrac{1}{2}am)+(A, B, C, P),$$

wo $P=\frac{1}{2}am+\frac{1}{2}mi$ ist. Die auf der Strecke von $\frac{1}{2}m$ bis $\frac{1}{2}am$ liegenden zm werden nicht zu dem zweiten Bereich gerechnet, so daß dieser, ein Rechteck von der Breite $\frac{1}{2}|m|$, kein zm enthält. Dann ist, auch für $b<0$, der erste Bereich gleich $m\tau$, also

$$[\gamma]=[\tau]+[\varphi], \qquad (m\varphi=ABCP). \tag{16.}$$

Ebenso ist

$$[\delta]=[\tau']+[\varphi'], \qquad (m\varphi'=A'B'C'P'). \tag{17.}$$

Die Zahlen $[\varphi]$ und $[\varphi']$ sind nur deshalb nicht gleich, weil die gebrochenen Strecken BC und $B'C'$ nicht kongruent sind. Denn im übrigen haben die Grenzen von $m\varphi$ und $m\varphi'$ dieselbe Lage zu dem m-Gitter: Die Eckpunkte A, C, P, A', C', P' sind Punkte $(z+\frac{1}{2}(1+i))m$, und da AB und $A'B'$ kongruent sind, befinden sich auch B nnd B' in entsprechender Lage zu dem m-Gitter. Man muß daher, um den Unterschied zwischen $[\varphi]$ und $[\varphi']$ angeben zu können, $\frac{1}{2}d$ positive oder negative Parallelogramme vom Flächeninhalt $\frac{1}{2}(ad-bc)$ zu $m\varphi'$ hinzufügen (sie sind in der Figur schraffiert). Ist die absolute Anzahl der zm in diesen Zusatzparallelogrammen gleich H, so ist also nach (15.), (16.), (17.)

$$D'(m, n)-D''(m, n)\equiv[\tau]-[\tau']+H\operatorname{sgn}(ad-bc). \tag{II.}$$

Die mit BC kongruente Grenzlinie von $m\varphi'$ wird mit $B'C_1'$ bezeichnet; C_1' ist der Punkt $\frac{1}{2}(1+i)mn+m$. Für $d=0$ wird $H=0$.

§ 6.

Der Bereich $m\nu_0''$ enthält $\frac{1}{4}(c^2+d^2-1)$ ganze Quadrate M, deren Mittelpunkte, da $m\nu_0=n\mu_0$ ist, mod. m nicht assoziierte Punkte zn sind. In jedem M liegt ein Punkt zm, und es ist

$$zm=z'n+r_h, \quad z'n=zm-r_h,$$

wo r_h eine Zahl eines Viertelsystems μ_h des Moduls m ist. Da $-r_h$ eine

Zahl von μ_{h+2} ist, so ergibt sich hieraus, wenn mit $D''_\mu(m,n)$ die Summe aller ν'_h-Charakteristiken der in den M liegenden zm, mit $D''(n,m)$ die Summe aller μ_h-Charakteristiken der Punkte zn in $m\nu''_0 (= n\mu''_0)$ bezeichnet wird,

$$\text{(III.)} \qquad D''_\mu(m,n) - D''(n,m) \equiv 2\cdot\tfrac{1}{4}(c^2+d^2-1) \equiv d.$$

Diese Kongruenz entspricht der Gleichung (1.) von § 1; sie bildet den Kern des Beweises.

§ 7.

Es ist nun die Differenz $R = D''(m,n) - D''_\mu(m,n)$ zu berechnen, d. h. die Summe der ν'_h-Charakteristiken der Punkte zm in den Bereichen $\varkappa_h, \pi_h, \pi'_h$ von $m\nu''_0$. Dazu teile ich $m\nu''_0$, indem ich von dem μ_0 am Nullpunkt, das kein zm enthält, absehe, in drei Bereiche $m\zeta, m\zeta', m\omega$. Der Bereich $m\zeta$ ist das Rechteck $ABCD$ vermehrt um einen m-Streifen an AD, $m\zeta'$ besteht aus dem Rechteck $A'B'C'D'$ vermehrt um den mi-Streifen an $A'D'$, $m\omega$ ist der übrig bleibende quadratähnliche Bereich, der in der Figur, weil $d-c=1$ ist, nur aus einem $\varkappa_2$ besteht.

Für $d=0$ geht $m\zeta$ in einen negativen mi-Streifen über, der mit einem positiven mi-Streifen von $m\omega$ zusammenfällt, $m\zeta'$ verschwindet. Dieser Fall ist, auch wegen der dann fehlenden Zusatzparallelogramme, leichter zu behandeln als der allgemeine, bedarf aber keiner besonderen Betrachtung, da er auch ganz so wie der allgemeine Fall erledigt werden kann*).

Nun denke man sich die Bereiche ν'_h über dem festbleibenden m-Punktgitter beweglich, schneide einmal die m-Streifen, dann die mi-Streifen aus $m\nu''_0$ heraus und vereinige darauf die kongruenten Schnittränder wieder, indem man die übrigbleibenden Bereiche aneinanderschiebt. Dann liegen die Punkte zm in diesen Bereichen genau so wie vor der Veränderung.

---

*) Diese Bemerkung ist deshalb von Wichtigkeit, weil bei manchen Beweisversuchen gerade dieser besondere Fall die Hauptschwierigkeit bietet. So ist es auch z. B. bei einem Beweisansatz, den ich im Anschluß an die von *Gauß* vom Nachlaß III an (Ges. W. B. II S. 335ff.) angestellten Untersuchungen gemacht habe. Vgl. meine in § 4 zitierte Arbeit. Man kommt dabei auf eine in bezug auf m und n symmetrische Figur, da ein m- und ein n-Gitter benutzt wird. Ich habe a. a. O. eine Formel angegeben, die für $|ad-bc|=2$, weil die Gitter dann eine besonders einfache Lage zu einander haben, leicht zum Ziele führt; aber zu einem vollständigen Beweise bin ich so nicht gelangt.

Dieses Verfahren werde zuerst auf $m\omega$ angewandt. Durch Weglassen der m- bzw. mi-Streifen entstehen aus $m\omega$ die Bereiche $(m\omega)_m$ bzw. $(m\omega)_{mi}$, die geometrisch kongruent sind. Dabei möge jedesmal der Mittelpunkt M des mittelsten $\varkappa_h$ festbleiben. In $(m\omega)_m$ sind alle $\varkappa_h$ und alle π_h, in $(m\omega)_{mi}$ ebenfalls alle $\varkappa_h$ und daneben alle π'_h von $m\omega$ erhalten geblieben. Dreht man nun $(m\omega)_{mi}$ durch 90° um M, so fällt jedes $\varkappa_h$ bzw. π_h von $(m\omega)_m$ mit einem $\varkappa_{-h}$ bzw. π'_{-h} von $(m\omega)_{mi}$ zusammen. Denn der Punkt M ist, wie aus den folgenden Gleichungen hervorgeht, Mittelpunkt eines $\varkappa_0$ oder $\varkappa_2$. Es ist, wenn m primär, also $\frac{1}{2}(m+1)$ nicht durch $1+i$ teilbar ist,

$$M = \frac{1}{2}(m+1)\cdot\frac{n}{2}(1+i) - \frac{n-m}{4}(1+i) = \frac{n+1}{4}m(1+i),$$

so daß M in einem $\varkappa_0$ liegt, weil $\frac{1}{4}(m+1)\cdot n(1+i)$ ein Punkt $(z+\frac{1}{2}(1+i))n$ ist. Dagegen ist

$$M = \frac{1}{2}(m-1)\cdot\frac{n}{2}(1+i) + \frac{n-m}{4}(1+i) = \frac{n-1}{4}m(1+i),$$

wenn m nicht primär ist; jetzt liegt M in einem $\varkappa_2$. Man sieht auch, daß M ein Punkt zm oder $(z+\frac{1}{2}(1+i))m$ ist, so daß bei der Drehung ein Punkt zm von $(m\omega)_{mi}$ mit einem Punkt $z'm$ von $(m\omega)_m$ zur Deckung kommt. Zwei solche von einander verschiedene Punkte liefern also zusammen den Beitrag 0 zu R. Nur wenn M ein Punkt zm ist und in einem $\varkappa_2$ liegt, ist sein Beitrag E, also auch der von $m\omega$, zu R nicht 0, sondern 2. Das tritt dann ein, wenn n primär, m nicht primär ist.

Bildet man darauf in der angegebenen Weise die Bereiche $(m\zeta)_{mi}$ und $(m\zeta')_m$, so erkennt man leicht, daß sie geometrisch kongruent werden, und weil A und A' Punkte $(z+\frac{1}{2}(1+i))m$ sind, so liegen auch die Punkte zm in beiden Bereichen gleichartig verteilt. Ein zm in einem $\varkappa_h$ oder π'_h von $(m\zeta)_{mi}$ entspricht dann einem $z'm$ von $(m\zeta')_m$ in einem $\varkappa_{-h}$ oder π_{-h}, so daß der Beitrag der Punkte zm in den π'_h von $m\zeta$ und in den π_h von $m\zeta'$ zu R verschwindet. Die zm in den $\varkappa_h$ dieser Bereiche sollen sogleich zusammen mit den zm in den π_h von $m\zeta$ und in den π'_h von $m\zeta'$ untersucht werden.

Die Bereiche $(m\zeta)_m$ und $(m\zeta')_{mi}$ sind deshalb nicht so einfach zu behandeln wie die übrigen reduzierten Bereiche, weil sie nicht kongruent sind. Jetzt bleiben nämlich die nicht kongruenten Grenzlinien BC und $B'C'$ bei der Wegnahme der m- bzw. mi-Streifen erhalten. Die Figuren 4^a und 4^b zeigen die Bereiche $(m\zeta)_m$ und $(m\zeta')_{mi}$ für dieselben Zahlen, die

bei Fig. 3 benutzt wurden; die Buchstaben der Fig. 3 sind für die neue Lage der bezeichneten Punkte beibehalten worden.

Aus $m\zeta$ wird $(m\zeta)_m = ABCD$, aus $m\zeta'$ wird $(m\zeta')_{mi} = A'B'C'D'$ abgeleitet. Man zerlege die Bereiche durch die dem m-Gitter parallelen

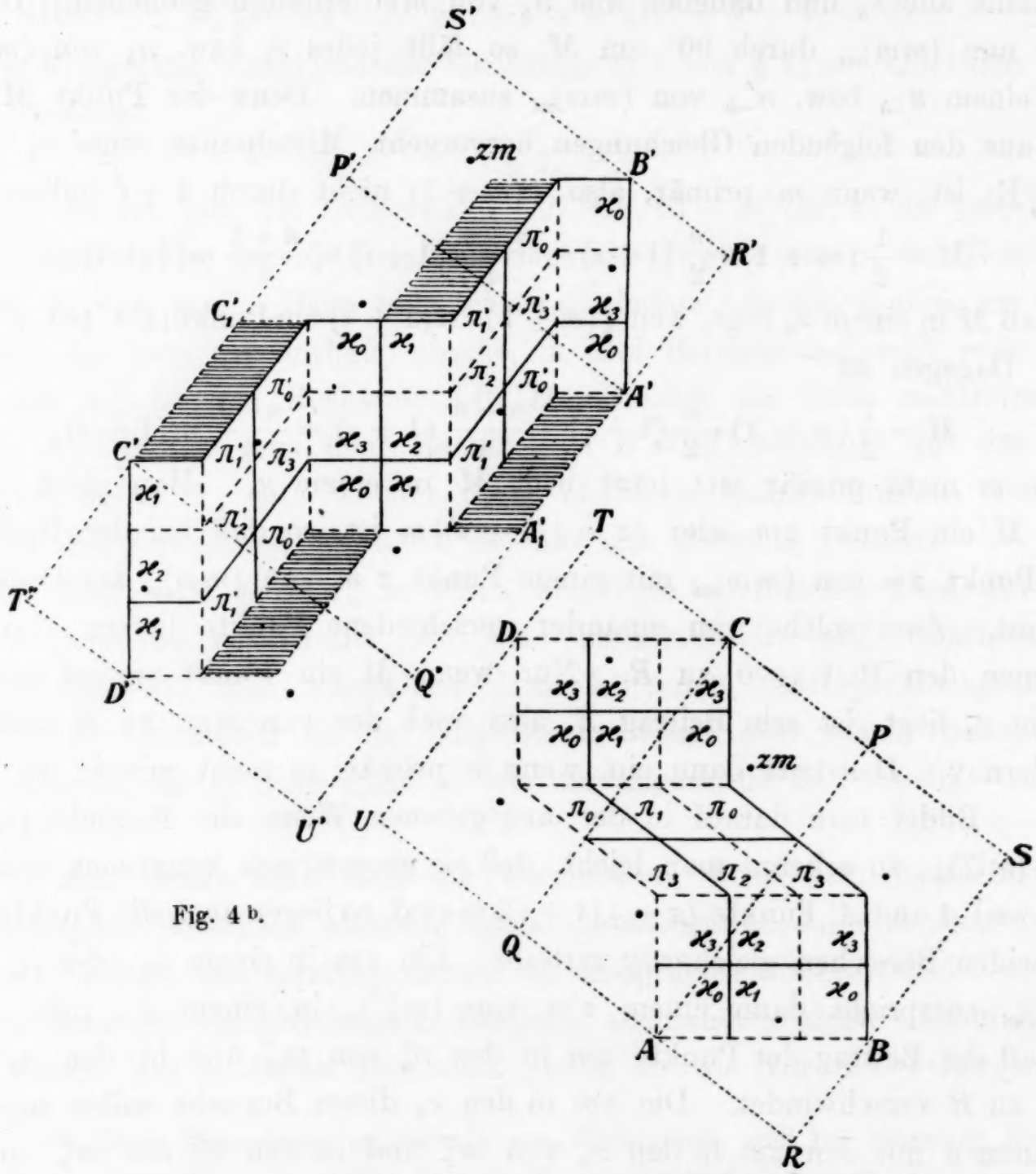


Fig. 4 b.

Fig. 4 a.

punktierten Linien in je 7 Teilbereiche, nachdem bei $(m\zeta')_{mi}$ die schon in § 5 erwähnten Zusatzparallelogramme an $B'C'$ und auch die entsprechenden Parallelogramme an der gegenüberliegenden kongruenten Grenze $D'A'$ hinzugefügt sind. Der so abgeänderte Bereich heiße $(m\zeta')'_{mi}$. Es ist

$$(m\zeta)_m = ABCD = APCQ + ARSP + CTUQ + ABR + CDT + AUD + CSB,$$

und die entsprechende Zerlegung gilt für $(m\zeta')'_{mi}$, wobei die letzten beiden Bereiche $A'_1U'D'$ und $C'_1S'B'$ sind. A'_1D' und C'_1B' sind die gebrochenen Grenzlinien, die an die Stelle von $A'D'$ und $B'C'$ treten.

Nun erkennt man leicht folgende Eigenschaften von $(m\zeta)_m$ und $(m\zeta')'_{mi}$: Die Punkte zm sind zentrisch symmetrisch verteilt in bezug auf einen Mittelpunkt, der wegen $a \equiv c$ kein Gitterpunkt und also kein zm ist. Je zwei in dieser Symmetrie einander entsprechende zm liefern bei $(m\zeta)_m$ zusammen den Beitrag 3, bei $(m\zeta')'_{mi}$ den Beitrag 1 zu R. Die letzten 6 Teilbereiche von $(m\zeta')'_{mi}$, von denen immer je 2 symmetrisch liegen, sind den entsprechenden von $(m\zeta)_m$ kongruent und zeigen dieselbe Verteilung der zm, so daß der Gesamtbeitrag dieser 12 Bereiche zu R verschwindet. Die geradlinigen Rechtecke $APCQ$ und $A'P'C'Q'$ haben als Eckpunkte Punkte $(z + \frac{1}{2}(1+i))m$, und die Anzahl der zm in ihnen kann deshalb berechnet werden. Die Strecken PC und $P'C'$ sind bei der Fortnahme der Streifen unverändert geblieben, daher liegen parallel zu ihnen, da z. B. P ursprünglich der Punkt $\frac{1}{2}am + \frac{1}{2}mi$, C der Punkt $\frac{1}{2}mn - \frac{1}{2}mi$ war, $|\frac{1}{2}b - 1|$ bzw. $|\frac{1}{2}b|$ Punkte zm in einer Reihe. Die Strecken AP und $A'P'$ sind dagegen um $\frac{1}{2}(c-1)$ Strecken von der Länge $|m|$ verkürzt oder verlängert worden, je nachdem $a \lesseqgtr 0$ ist; daher liegen in den Rechtecken parallel zu ihnen je $|\frac{1}{2}(a-c)|$ Punkte zm. Also ist die positive oder negative Anzahl der Punkte zm in $APCQ$ bzw. $A'P'C'Q'$ gleich $\frac{1}{2}(a-c)\cdot(\frac{1}{2}b-1)$ bzw. $\frac{1}{2}(a-c)\cdot\frac{1}{2}b$. Hieraus folgt, daß die Bereiche $\varkappa_h$ und π_h von $m\zeta$ und $\varkappa_h$ und π'_h von $m\zeta'$ zusammen zu R den Beitrag $\frac{1}{4}(a-c) - H\,\mathrm{sgn}\,(ad-bc)$ liefern, wo H dieselbe Zahl wie in (II.) ist. Im ganzen ist daher

$$\text{(IV.)}\quad D''(m,n) - D''_\mu(m,n) \equiv E + \frac{a-c}{4} - H\,\mathrm{sgn}\,(ad-bc).$$

§ 8.

Sehr einfach läßt sich endlich $D''(n,m) - D(n,m)$ bestimmen. Denn die Bereiche, durch deren Addition und Subtraktion $m\nu''_0 = n\mu''_0$ aus $m\nu_0 = n\mu_0$ hervorging, enthalten, wie aus Fig. 3 ersichtlich ist, genau soviel Punkte zn wie $n\sigma$ und $n\sigma'$. Daraus folgt dann in bekannter Weise

$$\text{(V.)}\qquad D''(n,m) - D(n,m) \equiv -[\sigma] + [\sigma'].$$

§ 9.

Es wurde bisher der Kürze wegen angenommen, daß $P = ac + bd - c^2 - d^2 > 0$ wäre. Ist $P < 0$, so werden ein oder zwei Stücke von ν'_h negativ, weil der Umfang dieses Bereiches sich selbst schneidet. Dann sind auch die Parallelogramme π_h und π'_h negativ. Die unzerlegten und noch mehr die zerlegten ν'_h greifen übereinander (wobei sie natürlich wegen ihrer negativen Bestandteile doch wieder Viertelsysteme des Moduls n enthalten), und der Bereich $m\nu_0$ wird von ihnen teilweise mehrfach bedeckt, aber so, daß an jeder Stelle genau ein positiver Bereich mehr vorhanden ist als negative. Ein zm liegt dann gegebenenfalls zugleich in mehreren Bereichen ν'_h und hat also mehr als eine ν'_h-Charakteristik, deren Summe zu nehmen ist. Die Charakteristik eines zm in einem negativen Stück eines ν'_h ist gleich $-h$ zu setzen.

Beim Übergang von $m\nu_0$ zu $m\nu''_0$ ist zu beachten, daß die Grenze von $m\nu''_0$ jetzt nicht mit dem äußeren Rande der Figur überall zusammenfällt, da ein Stück dieses Randes nur eine Falte sein kann, an der ein π_h oder π'_h sich über andere Bereiche legt. Ein Stück der Figur zwischen Grenze und Rand wird von ebensoviel positiven wie negativen Bereichen überdeckt, so daß ein darin liegendes zm bei der Berechnung von $[\gamma]$ und $[\delta]$ in § 5 nicht mitzuzählen ist. Deshalb kann man $[\gamma]$ und $[\delta]$ auch bei $P < 0$ als die Anzahl der zm innerhalb der als schlicht anzusehenden Bereiche berechnen, die von den Grenzen von $m\nu''_0$ und $m\nu_0$ begrenzt werden, da hier die Anzahl der positiven Charakteristiken eines zm die der negativen um 1 übertrifft. Diese schlichten Bereiche werden in der angegebenen Weise zerlegt und zu dem einen werden die Zusatzparallelogramme hinzugefügt.

Bei den reduzierten Bereichen des § 7 ist ebenso zwischen „Rand“ und „Grenze“ zu unterscheiden. Die aus Parallelogrammen π_h oder π'_h bestehenden negativen Parallelstreifen überdecken jetzt die aus den Quadraten $\varkappa_h$ bestehenden positiven Streifen, aber wegen $|m| \lessgtr |n|$ höchstens zur Hälfte. Zwei symmetrisch gelegene zm in $(m\zeta)_m$ oder $(m\zeta')_{mi}$ innerhalb der Grenzen liegen dann entweder beide in einem positiven oder beide in zwei positiven und einem negativen Bereich und liefern also wieder den Beitrag 3 oder 1 zu R, ebenso wie bei $P > 0$. Zwei symmetrisch gelegene zm zwischen Rand und Grenze liefern dagegen zusammen den

Beitrag 0 zu R, so daß die Berechnung des Beitrages von $(m\zeta)_m$ und $(m\zeta')_{mi}$ zu R wieder mittelst derselben schlichten Bereiche geschehen kann wie bei $P > 0$. Ein naheliegender Zusatz zu dieser Bemerkung wäre noch zu machen, wenn z. B. die gebrochenen Grenzlinien AD und BC sich schneiden sollten. Diese Andeutungen lassen aber wohl mit hinreichender Deutlichkeit erkennen, daß die Formeln (I.) bis (V.) auch für $P < 0$ unverändert gültig bleiben.

§ 10.

Aus der Addition der Kongruenzen (I.) bis (V.) folgt

$$D(m, n) - D(n, m) \equiv E + d,$$

wo E nur dann von 0 verschieden nnd zwar gleich 2 ist, wenn n primär, m nicht primär ist, also wenn $a \equiv c \equiv 1$, $b \equiv 0$, $d \equiv 2$ oder $a \equiv c \equiv 3$, $b \equiv 2$, $d \equiv 0$ ist. Man bestätigt hiernach leicht *das Reziprozitätsgesetz*

$$D(c+di, a+bi) - D(a+bi, c+di) \equiv 2 \cdot \left(\frac{a-1}{2} \cdot \frac{c-1}{2} + \frac{a+b-1}{2} \cdot \frac{c+d-1}{2}\right) \pmod 4,$$

das sich in Gestalt einer kleinen Tabelle bei *Gauß* (a. a. O., S. 367) findet. Mittelst der elementaren Eigenschaften des Zeichens $D(m, n)$ können die Einschränkungen $c > 0$, $d \gtrless 0$, $a \equiv c$ leicht beseitigt werden; wegen des Faktors 2 kann man die Voraussetzung $|m| \lessgtr |n|$ fallen lassen.

Über die Multiplikationstheoreme des Symbols $D(m, n)$ ist noch zu bemerken, daß das erste, nämlich

$$D(m \cdot m', n) \equiv D(m, n) + D(m', n),$$

wo auch m' relativ prim ist zu n, zu den elementaren Eigenschaften gehört, die unmittelbar aus der Definition folgen; ein besonderer Fall dieses Satzes wurde, in Verbindung mit dem Ergänzungssatz für i, auch schon in § 2 mit erwähnt. Der andere Multiplikationssatz, nämlich

$$D(m, n \cdot n') \equiv D(m, n) + D(m, n'),$$

wo die ungerade Zahl n' teilerfremd zu m ist, kann durch Vergleichung mit der *Eisenstein-Jacobi*schen Definition des allgemeinen biquadratischen Charakters aus dem Reziprozitätsgesetz gefolgert werden. Man kann ihn aber auch in bekannter Weise*) direkt aus der hier zugrunde gelegten *Gauß*schen Definition ableiten**).

*) *E. Schering*, Acta mathematica, Bd. 1.

**) *Gauß*, a. a. O., S. 321; *Gegenbauer*, Ber. der Amsterdamer Akademie, Bd. 10, S. 195.

Über das Spektrum der Hohlraumstrahlung.

Von Herrn *H. Weyl* in Göttingen.

Mit der gleichen Methode, die ich in einer vor kurzem in diesem Journal erschienenen Note*) entwickelt habe, läßt sich, wie ich jetzt zeigen möchte, ein neuer Satz über *das Spektrum der in einem beliebig gestalteten Hohlraum mit vollkommen spiegelnden Wänden möglichen Strahlungen* herleiten (§§ 4, 5). Dieser Satz, der eine *exakt* gültige Aussage enthält über die Anzahl derjenigen Eigenschwingungen, deren Frequenz unterhalb einer beliebig angenommenen Grenze liegt, gestattet auch von neuem, das *asymptotische* Gesetz des Spektrums zu beweisen, das ich erstmalig in einer Abhandlung in den Mathematischen Annalen**) begründet habe. Allerdings ist dazu die Feststellung erforderlich, daß das Spektrum der Schwingungsgleichung für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ dasselbe asymptotische Gesetz befolgt wie das zur Randbedingung $u = 0$ gehörige. Den Nachweis dieser Tatsache enthält der § 3; ich benutze dabei nicht die Methode der Exhaustion mittels kleiner Würfel, die ich in (A.) zu diesem Zwecke angewandt habe, sondern gehe einen Weg, der sich unmittelbarer an die Überlegungen von (C.) anschließt. In § 1 entwickle ich die allgemeinen Sätze aus der Theorie der Integralgleichungen, die als Grundlage der ganzen Untersuchung dienen; der größte Teil dieses Paragraphen ist daher eine Wiederholung aus (A.). § 2 enthält einige Hilfsbetrachtungen über die Schwingungsgleichung und die *Green*schen Funktionen.

*) „Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von deren Begrenzung“, dieses Journal Bd. 141, S. 1—11. Wird als (C.) zitiert.

**) „Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen“, Math. Ann. Bd. 71, S. 441—479. Wird als (A.) zitiert.

§ 1.

Es sei $K(s,t)$ $[0 \leqq \overset{s}{t} \leqq 1]$ — ebenso wie alle andern Kerne, welche wir betrachten — ein symmetrischer Kern, auf welchen die gewöhnliche *Fredholm-Hilbert*sche Theorie anwendbar ist. Seine positiven Eigenwerte ordnen wir in eine steigende Reihe $\overset{+}{\lambda}_1 \leqq \overset{+}{\lambda}_2 \leqq \overset{+}{\lambda}_3 \leqq \cdots$, in welcher jeder Eigenwert in seiner richtigen Vielfachheit vertreten sein soll. Das System der zugehörigen normierten Eigenfunktionen bezeichnen wir, in der den Eigenwerten entsprechenden Numerierung, mit $\overset{+}{\varphi}_n(s)$ $[n = 1, 2, 3, \ldots]$. Wir führen noch die reziproken Eigenwerte $\overset{+}{\mathfrak{l}}_n = \dfrac{1}{\overset{+}{\lambda}_n}$ ein; falls die Reihe der $\overset{+}{\mathfrak{l}}_n$ abbricht, ergänzen wir sie durch Hinzufügung von lauter Nullen zu einer unendlichen Reihe. Die reziproken negativen Eigenwerte bezeichnen wir entsprechend mit $\bar{\mathfrak{l}}_n$. Endlich ordnen wir auch die absoluten Beträge der $\overset{+}{\mathfrak{l}}_n$, $\bar{\mathfrak{l}}_n$ nach ihrer numerischen Größe in einer einzigen Reihe $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \ldots$ an. Kommen neben dem Kern K noch andere Kerne K', K^* usw. in Betracht, die durch obere Indizes von K unterschieden sind, so unterscheiden wir die zugehörigen Eigenwerte und Eigenfunktionen durch die gleichen oberen Indizes. Der Hauptsatz, auf den wir uns im folgenden stützen müssen, lautet in dieser Bezeichnungsweise so:

Ist K die Summe zweier Kerne K', K'', so bestehen die Beziehungen

$$(1.)\ \overset{+}{\mathfrak{l}}_{n+m+1} \leqq \overset{+}{\mathfrak{l}}'_{m+1} + \overset{+}{\mathfrak{l}}''_{n+1}, \qquad (2.)\ \bar{\mathfrak{l}}_{n+m+1} \geqq \bar{\mathfrak{l}}'_{m+1} + \bar{\mathfrak{l}}''_{n+1},$$

$$(3.)\ \mathfrak{l}_{n+m+1} \leqq \mathfrak{l}'_{m+1} + \mathfrak{l}''_{n+1}.$$

Der in § 3 von (C.) bewiesene Satz ist ein spezieller Fall der Ungleichung (1.). Wir verfahren hier ganz analog. Für alle Funktionen $x(s)$, deren Quadratintegral $\int_0^1 x^2\,ds \leqq 1$ ist, gelten die Ungleichungen

$$(4.)\begin{cases} \int_0^1 \int_0^1 \{K'(s,t) - \overset{+}{\mathfrak{l}}'_1 \overset{+}{\varphi}'_1(s)\overset{+}{\varphi}'_1(t) - \cdots - \overset{+}{\mathfrak{l}}'_m \overset{+}{\varphi}'_m(s)\overset{+}{\varphi}'_m(t)\}\, x(s)x(t)\,ds\,dt \leqq \overset{+}{\mathfrak{l}}'_{m+1}, \\ \int_0^1 \int_0^1 \{K''(s,t) - \overset{+}{\mathfrak{l}}''_1 \overset{+}{\varphi}''_1(s)\overset{+}{\varphi}''_1(t) - \cdots - \overset{+}{\mathfrak{l}}''_n \overset{+}{\varphi}''_n(s)\overset{+}{\varphi}''_n(t)\}\, x(s)x(t)\,ds\,dt \leqq \overset{+}{\mathfrak{l}}''_{n+1}. \end{cases}$$

Wenn nun $\overset{+}{\mathfrak{l}}_{m+n+1} \neq 0$ ist, so existieren die Eigenfunktionen $\overset{+}{\varphi}_i(s)$ $[i = 1, 2, \ldots, m+n+1]$, aus denen wir durch lineare Kombination

$$x(s) = x_1 \overset{+}{\varphi}_1(s) + x_2 \overset{+}{\varphi}_2(s) + \cdots + x_{m+n+1} \overset{+}{\varphi}_{m+n+1}(s)$$

bilden. Dabei sollen die Konstanten x_i so bestimmt werden, daß $x(s)$

zu den sämtlichen Funktionen $\overset{+}{\varphi}'_1(s), \ldots, \overset{+}{\varphi}'_m(s)$; $\overset{+}{\varphi}''_1(s), \ldots, \overset{+}{\varphi}''_n(s)$ orthogonal ist. Das ergibt $m+n$ lineare homogene Gleichungen für die Unbekannten x_i; wir können also noch dafür Sorge tragen, daß $x(s)$ die normierende Bedingung

$$\int_0^1 x^2\,ds \equiv x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m+n+1}^2 = 1$$

erfüllt. Für diese spezielle Funktion $x(s)$ sind die linken Seiten der beiden Ungleichungen (4.)

$$= \int_0^1 \int_0^1 K'(s,t)\,x(s)\,x(t)\,ds\,dt, \text{ bzw. } = \int_0^1 \int_0^1 K''(s,t)\,x(s)x(t)\,ds\,dt,$$

ihre Summe also

$$= \int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\,x(s)\,x(t)\,ds\,dt = \overset{+}{\mathfrak{l}}_1 x_1^2 + \overset{+}{\mathfrak{l}}_2 x_2^2 + \cdots + \overset{+}{\mathfrak{l}}_{m+n+1} x_{m+n+1}^2$$

$$\geqq \overset{+}{\mathfrak{l}}_{m+n+1}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m+n+1}^2) = \overset{+}{\mathfrak{l}}_{m+n+1}.$$

Damit ist (1.) bewiesen. (2.) ergibt sich, wenn wir die Ungleichung (1.) auf

$$-K = (-K') + (-K'')$$

anwenden. (3.) ist eine unmittelbare Konsequenz aus (1.) und (2.).

Ersetzen wir K durch die zweireihige symmetrische Kernmatrix*)

$$K^\circ = \begin{Vmatrix} 0 & K(s,t) \\ K(t,s) & 0 \end{Vmatrix},$$

so wird

$$(5.) \qquad \overset{+}{\mathfrak{l}}{}^\circ_n = \mathfrak{l}_n,\ \overset{-}{\mathfrak{l}}{}^\circ_n = -\mathfrak{l}_n; \qquad \mathfrak{l}^\circ_{2n-1} = \mathfrak{l}^\circ_{2n} = \mathfrak{l}_n.$$

Für symmetrische Kernmatrizen gelten die Ungleichungen (1.), (2.), (3.) natürlich ebenso wie für symmetrische Kerne. Davon wollen wir eine spezielle Anwendung machen.

Sind $\Phi_i(s)$, $\Psi_i(s)$ $[i = 1, 2, \ldots h]$ irgend h Paare von Funktionen mit endlichem Quadratintegral, so betrachten wir die symmetrischen Kernmatrizen

$$k^\circ = \begin{Vmatrix} 0, & \sum_{i=1}^{h} \Phi_i(s)\,\Psi_i(t) \\ \sum_{i=1}^{h} \Phi_i(t)\,\Psi_i(s), & 0 \end{Vmatrix}$$

*) Vgl. *Fredholm*, Acta mathematica 27, S. 378 und betreffs der speziellen hier verwendeten Kernmatrizen *Hilbert*, Nachr. d. Ges. d. Wiss., Göttingen, Math.-phys. Kl., 1906, S. 462.

und

$$K^\bullet = K^\circ - k^\circ.$$

k° hat höchstens h positive und h negative Eigenwerte; der $(2h+1)$-te reziproke Eigenwert von k° ist also bereits gleich Null. Daher folgt aus $K^\circ = K^\bullet + k^\circ$ nach (3.):

$$\mathfrak{l}^\circ_{n+2h} \leqq \mathfrak{l}^\bullet_n \quad [n = 1, 2, 3, \ldots],$$

und daraus, indem wir die Quadratsummen bilden und die letzte Gleichung (5.) heranziehen,

$$2\int_0^1\int_0^1 \left\{K(s,t) - \sum_{i=1}^{h} \Phi_i(s)\,\Psi_i(t)\right\}^2 ds\,dt = (\mathfrak{l}^\bullet_1)^2 + (\mathfrak{l}^\bullet_2)^2 + \cdots \text{ in inf.}$$

$$\geqq 2[\mathfrak{l}^2_{h+1} + \mathfrak{l}^2_{h+2} + \cdots].$$

Das ist der bereits von Herrn *E. Schmidt**) bewiesene Satz:

Sucht man $K(s,t)$ mit Hilfe einer Produktsumme von der Form $\sum_{i=1}^{h} \Phi_i(s)\,\Psi_i(t)$ zu approximieren, so kann das Quadratintegral des Fehlers nicht unter $\mathfrak{l}^2_{h+1} + \mathfrak{l}^2_{h+2} + \cdots$ herabgedrückt werden.

Ist $f(s)$ irgend eine Funktion, deren Quadratintegral $\int_0^1 f^2\,ds = 1$ ist, so kann man $K(s,t)$ in einen Kern $K^*(s,t)$ verwandeln, der zu $f(t)$ orthogonal ist

$$\int_0^1 K^*(s,t)\,f(t)\,dt = 0,$$

zugleich aber für alle zu $f(s)$ orthogonalen Funktionen $x(s)$ die Gleichung

$$K\langle x\rangle = K^*\langle x\rangle$$

erfüllt; $K\langle x\rangle$ bedeutet stets die zu dem Kern K gehörige quadratische Integralform $\int_0^1\int_0^1 K(s,t)\,x(s)\,x(t)\,ds\,dt$. Man hat zu setzen:

$$K^*(s,t) = K(s,t) - f(s)\int_0^1 K(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau - f(t)\int_0^1 K(s,\sigma)\,f(\sigma)\,d\sigma$$

$$+ f(s)\,f(t)\int_0^1\int_0^1 K(\sigma,\tau)\,f(\sigma)\,f(\tau)\,d\sigma\,d\tau.$$

Wenden wir die Ungleichung

$$\int_0^1\int_0^1 \left\{K(s,t) - \sum_{i=1}^{n} \overset{+}{\mathfrak{l}}_i\,\overset{+}{\varphi}_i(s)\,\overset{+}{\varphi}_i(t)\right\} x(s)\,x(t)\,ds\,dt \leqq \overset{+}{\mathfrak{l}}_{n+1}$$

nur auf Funktionen $x(s) = x^*(s)$ an, die zu $f(s)$ orthogonal sind, so dürfen

---

*) Math. Annalen, Bd. 63 (1907), S. 467 ff.

wir in ihr jedes $\overset{+}{\varphi}_i(s)$ durch die zu $f(s)$ orthogonale Funktion

$$\psi_i(s) = \overset{+}{\varphi}_i(s) - f(s) \int_0^1 f(t)\, \overset{+}{\varphi}_i(t)\, dt$$

ersetzen. Für jene $x(s) = x^*(s)$ gilt also

$$(6.) \quad \int_0^1 \int_0^1 \left\{ K^*(s,t) - \sum_{i=1}^{n} \overset{+}{\lambda}_i \psi_i(s)\, \psi_i(t) \right\} x(s)\, x(t)\, ds\, dt \leqq \overset{+}{\lambda}_{n+1}.$$

Ist jetzt $x(s)$ wieder eine ganz beliebige Funktion, deren Quadratintegral $= 1$ ist, so hat für diese der Ausdruck auf der linken Seite von (6.) offenbar den gleichen Wert wie für die Funktion

$$x^*(s) = x(s) - f(s) \int_0^1 f(t)\, x(t)\, dt,$$

deren Quadratintegral

$$= \int_0^1 x^2\, ds - \left(\int_0^1 f x\, ds \right)^2 \leqq 1$$

ist. Also gilt (6.) allgemein, und wir schließen daraus nach (1.), da der $(n+1)$-te reziproke positive Eigenwert von $\sum_{i=1}^{n} \overset{+}{\lambda}_i \psi_i(s)\, \psi_i(t)$ Null ist, $\overset{+}{\lambda}^*_{n+1} \leqq \overset{+}{\lambda}_{n+1}$. Da andrerseits die Differenz $K - K^*$ ein Kern ist, der nur *einen* positiven und *einen* negativen Eigenwert besitzt, gilt $\overset{+}{\lambda}_{n+1} \leqq \overset{+}{\lambda}^*_n$. So bekommen wir die folgenden Ungleichungen (die das genaue Analogon eines bekannten *Sturm*schen Theorems über quadratische Formen mit endlichvielen Variabeln sind):

$$\overset{+}{\lambda}_1 \geqq \overset{+}{\lambda}^*_1 \geqq \overset{+}{\lambda}_2 \geqq \overset{+}{\lambda}^*_2 \geqq \overset{+}{\lambda}_3 \geqq \overset{+}{\lambda}^*_3 \geqq \cdots.$$

§ 2.

Es sei J ein von einer stetig gekrümmten Kurve $\mathfrak{C}$ begrenztes Gebiet der (xy)-Ebene, J sein Inhalt und L die Länge der Randkurve. Punkte innerhalb J bezeichnen wir mit $p = (xy)$, $p' = (x'y')$ usw. und das an der Stelle p gelegene Flächenelement $dx\,dy$ mit dp. Punkte auf der Randkurve bezeichnen wir mit s, das zugehörige Bogenelement mit ds und die zugehörige (nach innen weisende) Normale mit n_s. Diejenigen Werte $\varkappa$, für welche die Schwingungsgleichung

$$\Delta u + \varkappa u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varkappa u = 0$$

eine innerhalb J reguläre und am Rande von J verschwindende Lösung besitzt, bezeichnen wir, der Größe nach geordnet, mit $\varkappa_i\,[i = 1, 2, 3, \ldots]$, ihre reziproken Werte $\frac{1}{\varkappa_i}$ mit q_i. Dabei ist jeder Wert $\varkappa_i$ so oft zu setzen, als es linear unabhängige, der Randbedingung $u = 0$ genügende Lösungen der Schwingungsgleichung für $\varkappa = \varkappa_i$ gibt. Wir können dann jedem $\varkappa_i$ eine solche Lösung

u_i zuordnen, daß diese insgesamt ein normiertes Orthogonalsystem bilden. Ersetzen wir die Randbedingung $u = 0$ durch die Forderung, daß die normale Ableitung am Rande $\frac{\partial u}{\partial n}$ verschwinden soll, so mögen in ähnlicher Weise ϱ_i $[i = 0, 1, 2, \ldots]$ die dieser Forderung entsprechenden Eigenwerte und v_i die zugehörigen normierten Eigenfunktionen sein. Außer von $\varrho_0 = 0$ (wozu $v_0 = \frac{1}{\sqrt{J}}$ gehört) können wir von den ϱ_i auch die Reziproken $r_i = \frac{1}{\varrho_i}$ bilden.

Ist $G(pp')$ die gewöhnliche *Green*sche Funktion mit der logarithmischen Unendlichkeitsstelle p' und dem „Aufpunkt" p, so sind die $\varkappa_i, v_i$ die Eigenwerte und Eigenfunktionen des symmetrischen Kerns $\frac{1}{2\pi} G(pp')$. $H(pp')$ bedeute die *Green*sche Funktion 2. Art, deren normale Ableitung am Rande konstant, nämlich $= \frac{2\pi}{L}$ ist und deren Randintegral $\int_{\mathfrak{C}} H(sp')\,ds$ für jede Lage des Unendlichkeitspunktes p' verschwindet. Die Eigenwerte des gleichfalls symmetrischen Kerns $\frac{1}{2\pi} H(pp')$, die wir mit ϱ_i' $[i = 1, 2, 3, \ldots]$ bezeichnen, sind alle positiv, stimmen aber mit den ϱ_i nicht überein. Erst wenn wir den Kern $\frac{1}{2\pi} H$ in der am Schluß von § 1 geschilderten Weise zu $f(p) = \frac{1}{\sqrt{J}}$ orthogonal machen, erhalten wir einen Kern $\frac{1}{2\pi} H^*$, dessen Eigenwerte und zugehörige Eigenfunktionen durch ϱ_i, bzw. v_i $[i = 1, 2, 3, \ldots]$ geliefert werden; der Eigenwert $\varrho_0 = 0$ ist dabei herausgefallen. Also gilt

$$(7.) \qquad \varrho_0 \leqq \varrho_1' \leqq \varrho_1 \leqq \varrho_2' \leqq \varrho_2 \leqq \cdots .$$

Auch G können wir in der gleichen Weise wie H zu 1 orthogonal machen; die Eigenwerte $\varkappa_i^*$ des so entstehenden Kerns $\frac{1}{2\pi} G^*$ werden den Ungleichungen genügen:

$$\varkappa_1 \leqq \varkappa_1^* \leqq \varkappa_2 \leqq \varkappa_2^* \leqq \varkappa_3 \leqq \cdots .$$

Man weist, ganz analog wie in § 5 von (C.), nach, daß $H - G$, aber auch $H^* - G^*$ positiv-definit ist. Aus dem positiv-definiten Charakter von $H - G$ folgt

$$\varrho_i' \leqq \varkappa_i, \text{ also a fortiori } \varrho_{i-1} \leqq \varkappa_i.$$

Die gleiche Tatsache habe ich in (C.) § 5 bewiesen, indem ich statt der *Green*schen Funktionen des Differentialausdrucks Δu die von $\Delta u - u$ be-

nutzte, da alsdann die Diskrepanz zwischen der *Green*schen Funktion 2. Art und den Eigenwerten ϱ_i nicht auftritt. Es lag mir daran, hier zu zeigen, daß diese Schwierigkeit, auch wenn man die gewöhnlichen *Green*schen Funktionen G, H beibehält, durch Aufstellung der Ungleichungen (7.) überwunden werden kann. — Aus dem positiv-definiten Charakter von $H^* - G^*$ folgt

$$\varrho_i \leqq \varkappa_i^*, \text{ also gleichfalls } \varrho_i \leqq \varkappa_{i+1}.$$

Die q_i genügen nach (C.), § 4 dem asymptotischen Gesetz

$$\lim_{n=\infty} n q_n = \frac{J}{4\pi}. \tag{8.}$$

Endlich haben wir noch den folgenden, von Herrn *Stekloff**) herrührenden Hilfssatz nötig: Es sei $f(p)$ eine beliebige im Innern von J stetig differenzierbare Funktion, für welche das Integral

$$C = \int_J |\operatorname{grad} f|^2 dp = \iint_J \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

endlich ist. Bilden wir dann die „*Fourier*koeffizienten"

$$\int_J f(p) v_i(p)\, dp = c_i$$

von f, so ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varrho_i c_i^2 \leqq C. \tag{9.}$$

In der Tat bilden

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho_i}} \operatorname{grad} v_i \quad [i = 1, 2, 3, \ldots]$$

ein normiertes System zueinander „orthogonaler" Vektorfelder; also ist nach der bekannten *Bessel*schen Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho_i} \Big(\int_J \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} v_i\, dp \Big)^2 \leqq C.$$

Es ist aber

$$\iint_J \Big(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial v_i}{\partial y} \Big) dx\, dy = - \iint_J f \Delta v_i\, dx\, dy - \int_{\mathfrak{C}} f \frac{\partial v_i}{\partial n_s} ds$$

$$= \varrho_i \int_J f v_i\, dp = \varrho_i c_i.$$

Damit ist (9.) bewiesen.

---

*) Annales de Toulouse, t. III (1901), p. 303—305.

§ 3.

Um das asymptotische Gesetz (8.) auf die ν_i zu übertragen, betrachten wir zunächst den Kern

$$D(pp') = \frac{1}{2\pi}\{H(pp') - G(pp')\},$$

dessen (sämtlich positive) reziproke Eigenwerte δ_i heißen mögen. D ist hinsichtlich p im Innern von J eine reguläre Potentialfunktion; da ihre Randwerte $= \frac{1}{2\pi} H(sp')$ sind, muß sie selber

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathfrak{C}} \frac{\partial G}{\partial n_s}(ps)\, H(sp')\, ds$$

sein. Für das Integral

$$\iint_J \left\{\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy = \int_J |\operatorname{grad}_p D|^2\, dp$$

aber findet man den Wert

$$-\int_{\mathfrak{C}} D(sp')\, \frac{\partial D}{\partial n_s}(sp')\, ds = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathfrak{C}} H(sp')\, \frac{\partial G}{\partial n_s}(sp')\, ds = D(p'p').$$

Da

$$\frac{\partial G}{\partial n_s} > 0, \quad \int_{\mathfrak{C}} \frac{\partial G}{\partial n_s}\, ds = 2\pi, \quad H(sp') = 2 \lg \frac{1}{r(p's)} + E(p's)$$

ist, — es bedeutet r die Entfernung der beiden Punkte p' und s, und E ist eine Funktion, deren absoluter Betrag für alle p' und s unterhalb einer endlichen Grenze bleibt*) — so finden wir, wenn $\varrho(p')$ die kürzeste Entfernung des Punktes p' vom Rande $\mathfrak{C}$ bezeichnet und c eine gewisse Konstante ist,

$$(10.) \qquad 0 < D(p'p') < \frac{1}{\pi} \lg \frac{c}{\varrho(p')}.$$

Wenden wir jetzt auf $f(p) = D(pp')$ die Ungleichung (9.) an, indem wir die Funktionen

$$\int_J D(pp')\, v_i(p)\, dp = w_i(p')$$

bilden, so haben wir für jedes noch so große n

$$\sum_{i=1}^{n} \varrho_i w_i^2(p) \leqq D(pp).$$

Durch Integration ergibt sich daraus, da $\int_J D(pp)\, dp$ zufolge (10.) endlich ist, die Konvergenz der Reihe

*) Siehe *E. E. Levi*, Nachr. d. Ges. d. Wiss., Göttingen, Math.-phys. Kl., 1908, S. 249—252.

$$(11.) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \varrho_i a_i \qquad \left(a_i = \int_J w_i^2(p)\, dp\right).$$

Nun ist aber andrerseits

$$\int_J \left\{D(pp') - \sum_{i=0}^{n-1} v_i(p)\, w_i(p')\right\}^2 dp \leqq \sum_{i=n}^{\infty} w_i^2(p'),$$

also

$$\int_J\int_J \left\{D(pp') - \sum_{i=0}^{n-1} v_i(p)\, w_i(p')\right\}^2 dp\, dp' \leqq \sum_{i=n}^{\infty} a_i.$$

Bezeichnen wir den Rest der Reihe (11.) vom n-ten Gliede ab mit η_n, so ist die rechte Seite der letzten Ungleichung $\leqq \mathfrak{r}_n \eta_n$, und somit folgt jetzt durch Anwendung des *Schmidt*schen Satzes auf den Kern $D(pp')$

$$\mathfrak{d}_{n+1}^2 + \mathfrak{d}_{n+2}^2 + \cdots \text{ in inf.} \leqq \mathfrak{r}_n \eta_n.$$

Weil aber

$$\mathfrak{d}_{n+1}^2 + \mathfrak{d}_{n+2}^2 + \cdots \text{ in inf.} \geqq \mathfrak{d}_{n+1}^2 + \cdots + \mathfrak{d}_{2n}^2 \geqq n\,\mathfrak{d}_{2n}^2,$$

gilt um so mehr

$$\mathfrak{d}_{2n} \leqq \sqrt{n\,\eta_{n\ n}}.$$

$\lim_{n=\infty} \eta_n$ ist gleich 0. Ziehen wir das asymptotische Gesetz der $\mathfrak{q}_n$ heran, so haben wir damit folgendes Resultat gewonnen: Setzt man

$$\mathfrak{d}_{2n} = \varepsilon_n \sqrt{\mathfrak{q}_{n+1\ n}},$$

so ist $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$.

Nunmehr kehren wir zu dem Kern

$$\frac{1}{2\pi} H = \frac{1}{2\pi} G + D$$

zurück. Wir wählen eine feste ganze Zahl $h > 2$, denken uns n, das schließlich gegen ∞ konvergieren soll, bereits $\geqq h$ und setzen die größte ganze in $\frac{n}{h}$ enthaltene Zahl $= n_1$. Dann haben wir nach dem Hauptsatz von § 1 die Beziehung

$$(12.) \qquad (\mathfrak{r}_n \leqq)\, \mathfrak{r}'_n \leqq \mathfrak{q}_{n-2n_1+1} + \mathfrak{d}_{2n_1} = \mathfrak{q}_{n-2n_1+1} + \varepsilon_{n_1} \sqrt{\mathfrak{q}_{1+n_1}\, \mathfrak{r}_{n_1}}.$$

Diese Ungleichung gewinnt eine deutlichere Gestalt, wenn wir die Abkürzung

$$\omega_n = \frac{\mathfrak{r}_n}{\mathfrak{q}_{n+1}} = \frac{\varkappa_{n+1}}{\varrho_n}$$

einführen. Von diesen ω_n wissen wir, daß sie alle $\geqq 1$ sind. Aus (12.) erhalten wir jetzt

$$\omega_n \mathfrak{q}_{n+1} \leqq \mathfrak{q}_{n-2n_1+1} + \varepsilon_{n_1} \mathfrak{q}_{1+n_1} \sqrt{\omega_{n_1}} \leqq (\mathfrak{q}_{n-2n_1+1} + \varepsilon_{n_1} \mathfrak{q}_{1+n_1}) \sqrt{\omega_{n_1}},$$

$$\omega_n \leqq \left(\frac{\mathfrak{q}_{n-2n_1+1}}{\mathfrak{q}_{n+1}} + \varepsilon_{n_1} \frac{\mathfrak{q}_{1+n_1}}{\mathfrak{q}_{n+1}}\right) \sqrt{\omega_{n_1}}.$$

Setzen wir den auf der rechten Seite auftretenden Klammerausdruck gleich e_n, so ist

$$(13.) \qquad \omega_n \leqq e_n \sqrt{\omega_{n_1}}, \qquad \lim_{n=\infty} e_n = \frac{h}{h-2}.$$

Man denke sich, um (13.) in rekursiver Weise anwenden zu können, n in dem der Grundzahl h entsprechenden Zahlensystem durch eine Ziffernfolge ausgedrückt:

$$n = (b_l, b_{l-1}, \dots b_0) = b_l \cdot h^l + b_{l-1} \cdot h^{l-1} + \cdots + b_0;$$

alle b_i gehören der Ziffernreihe $0, 1, \dots h-1$ an, und es ist insbesondere $b_l \neq 0$. Man setze

$$\begin{aligned} n_1 &= (b_l, b_{l-1}, \dots b_1) = b_l \cdot h^{l-1} + b_{l-1} \cdot h^{l-2} + \cdots + b_1, \\ n_2 &= \quad (b_l, \cdots b_2) = \quad b_l \cdot h^{l-2} + \cdots + b_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_l &= \quad (b_l) = \quad b_l. \end{aligned}$$

Aus (13.) ergibt sich dann

$$\begin{array}{l|l} \omega_n \leqq e_n \sqrt{\omega_{n_1}}, & 1 \\ \omega_{n_1} \leqq e_{n_1} \sqrt{\omega_{n_2}}, & {}^1/_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \omega_{n_{l-1}} \leqq e_{n_{l-1}} \sqrt{\omega_{n_l}}. & {}^1/_{2^{l-1}} \end{array}$$

Wir erheben diese Ungleichungen zu den rechts daneben geschriebenen Potenzen (dies ist statthaft, weil die linke Seite aller Ungleichungen $\geqq 1$ ist) und multiplizieren:

$$\omega_n \leqq (e_n \cdot \sqrt[2]{e_{n_1}} \cdot \sqrt[4]{e_{n_2}} \cdots \sqrt[2^{l-1}]{e_{n_{l-1}}}) \cdot \sqrt[2]{\omega_{n_l}}.$$

Ist e eine (wegen (13.) vorhandene) endliche obere Grenze aller e_n und ω die größte der Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{h-1}$, so ist offenbar

$$(e_n \cdot \sqrt[2]{e_{n_1}} \cdot \sqrt[4]{e_{n_2}} \cdots \sqrt[2^{l-1}]{e_{n_{l-1}}}) < e^2, \quad \sqrt[2^l]{\omega_{n_l}} \leqq \sqrt[2^l]{\omega} < \omega,$$

darum

$$\omega_n < \omega \cdot e^2 \quad [n = 1, 2, 3, \dots \text{ in inf.}].$$

Die Folge der ω_n ist also sicher *beschränkt.* Setzen wir

$$\limsup_{n=\infty} \omega_n = \Omega,$$

so lehrt (13.):

$$\Omega \leqq \frac{h}{h-2} \sqrt{\Omega}, \text{ d. i. } \Omega \leqq \left(\frac{h}{h-2}\right)^2.$$

Diese Beziehung muß für jede ganze Zahl $h > 2$ gelten, obwohl Ω von h gänzlich unabhängig ist; das ist nur möglich, wenn $\Omega \leqq 1$. Da jedoch alle $\omega_n \geqq 1$ waren, ergibt sich in der Tat

$$\Omega = \lim_{n=\infty} \omega_n = 1; \qquad \lim_{n=\infty} n r_n = \frac{J}{4\pi}.$$

Dieser Beweis erleidet einige Modifikationen, wenn wir ihn *auf den Raum übertragen* wollen. Wir wenden dabei alle Bezeichnungen in analoger Weise an. Der Unterschied ist der, daß man für $D(pp)$ eine Ungleichung der Form

$$D(pp) \leqq \frac{\text{Const.}}{\varrho(p)}$$

erhält und daß infolgedessen die Endlichkeit des Integrals $\int_J D(pp)\,dp$ nicht sichergestellt ist. Bezeichnen wir aber mit J_n die Gesamtheit derjenigen Punkte p von J, deren kürzester Abstand $\varrho(p)$ vom Rande $\geqq \frac{1}{n}$ ist, so können wir wenigstens behaupten, daß

$$\int_{J_n} D(pp)\,dp \leqq \text{Const. lg } n \qquad [n \geqq 2]$$

ist, mithin

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varrho_i \int_{J_n} w_i^2(p)\,dp \leqq \text{Const. lg } n$$

und a fortiori

$$\text{(14.)} \qquad \sum_{i=1}^{n} \varrho_i \int_{J_n} w_i^2(p)\,dp \leqq \text{Const. lg } n.$$

Im Falle des Raumes ergibt der in (C.), § 4 für die Ebene durchgeführte Beweis

$$\lim_{n=\infty} n^{2/3} q_n = \left(\frac{J}{6\pi^2}\right)^{2/3}.$$

Da ferner, wie leicht zu sehen, $\int_J D^2(pp')\,dp'$ eine in ganz J beschränkte Funktion von p ist, folgt aus

$$\sum_{i=1}^{\infty} w_i^2(p) \leqq \int_J D^2(pp')\,dp':$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{J-J_n} w_i^2(p)\,dp \leqq \text{Const. } \frac{1}{n};$$

darum

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{J-J_n} w_i^2(p)\,dp \leqq \text{Const. } \frac{1}{n},$$

$$\text{(15.)} \quad \sum_{i=1}^{n} \varrho_i \int_{J-J_n} w_i^2\,dp \leqq \sum_{i=1}^{n} \varkappa_{i+1} \int_{J-J_n} w_i^2\,dp \leqq \text{Const. } \sum_{i=1}^{n} i^{2/3} \int_{J-J_n} w_i^2\,dp \leqq \text{Const. } \frac{1}{n^{1/3}}.$$

Durch Addition von (14.) und (15.) hat man

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \varrho_i a_i \leqq \text{Const. } \lg n = C \cdot \lg n \qquad [n \geqq 2].$$

Durch partielle Summation schließt man daraus

$$\sum_{i=n}^{\infty} a_i = \sum_{i=n}^{\infty} (a_i \varrho_i) \mathfrak{r}_i = \sum_{i=n}^{\infty} (s_i - s_{n-1})(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_{i+1})$$

$$\leqq C \cdot \sum_{i=n}^{\infty} (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_{i+1}) \lg i$$

$$= C \cdot \mathfrak{r}_n \lg n + C \cdot \sum_{i=n}^{\infty} \mathfrak{r}_{i+1} [\lg(i+1) - \lg i]$$

$$\leqq C\Big(\mathfrak{r}_n \lg n + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\mathfrak{r}_{i+1}}{i}\Big) = C \cdot \zeta_n .$$

Von da ab verläuft der Beweis wesentlich einfacher als für die Ebene. Wir reichen nämlich hier mit der (wegen der Konvergenz von $\Sigma \mathfrak{r}_i^2$) a priori richtigen Abschätzung

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{n} \cdot \mathfrak{r}_n = 0$$

aus, finden daraus

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \zeta_n}{\lg n} = 0$$

und wegen

$$n \mathfrak{d}_{2n}^2 \leqq \mathfrak{d}_{n+1}^2 + \mathfrak{d}_{n+2}^2 + \cdots \leqq C \cdot \zeta_n :$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^{3/4} \mathfrak{d}_n}{\sqrt{\lg n}} = 0 .$$

Aus der Ungleichung

$$(16.) \qquad 1 \leqq \omega_n \leqq \frac{q_{n-n'+1}}{q_{n+1}} + \frac{\mathfrak{d}_{n'}}{q_{n+1}}$$

folgt jetzt, wenn wir unter n' die größte ganze in $n^{20/21}$ enthaltene Zahl verstehen,

$$\lim_{n=\infty} \omega_n = 1 .$$

Denn der erste Summand auf der rechten Seite von (16.) konvergiert bei dieser Festsetzung gegen 1, der zweite aber $\left(\text{stärker als } \frac{\sqrt{\lg n}}{n^{1/21}}\right)$ gegen 0.

§ 4.

Wir betrachten einen von Materie entblößten Hohlraum J, der von einer geschlossenen, nach innen zu als vollkommener Spiegel ausgebildeten Oberfläche $\mathfrak{O}$ begrenzt wird. Die Frage nach dem Spektrum der in einem solchen Hohlraum möglichen Strahlungszustände ist für die gesamte Strahlungstheorie von großer Wichtigkeit.

Wir rechnen im Raum mit rechtwinkligen Koordinaten x, y, z. Ein willkürlicher Punkt im Innern des Hohlraums heiße $p = (xyz)$, das dort befindliche Raumelement $dx\,dy\,dz = dp$; Punkte der Oberfläche o, das zugehörige Oberflächenelement do, die nach innen zu gekehrte Normale n_o und ihre Richtungskosinusse $X(o), Y(o), Z(o)$. Räumliche Integrationen erstrecken sich stets über den ganzen Hohlraum J, Integrationen nach o stets über die ganze Oberfläche $\mathfrak{O}$. t bedeutet die Zeit, c die Lichtgeschwindigkeit. Um einfache Schwingungen zu ermitteln, machen wir für die elektrische und magnetische Feldstärke im Innern des Hohlraums den Ansatz

$$\mathfrak{E}(xyz) \cdot e^{i\nu t}, \text{ bzw. } \mathfrak{M}(xyz) \cdot e^{i\nu t};$$

ν ist die unbekannte Frequenz dieser Eigenschwingung. E_x, E_y, E_z seien die Komponenten des Vektors $\mathfrak{E}$, M_x, M_y, M_z die von $\mathfrak{M}$. Nach der *Maxwell*schen Theorie bekommen wir für $\mathfrak{E}$ die Beziehungen

$$\text{(I.)} \quad \begin{cases} \Delta\mathfrak{E} + \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 \mathfrak{E} = 0, \ \operatorname{div}\mathfrak{E} = 0\text{: im Innern von } J, \\ \mathfrak{E} \text{ normal gerichtet: an der Oberfläche.} \end{cases}$$

Die Eigenwerte $\left(\frac{\nu}{c}\right)^2$ dieses Problems mögen allgemein mit σ bezeichnet werden. Hat man einen Eigenvektor $\mathfrak{E}$ ermittelt, der (I.) genügt, so ist dadurch $\mathfrak{M}$ und also der gesamte Strahlungszustand völlig bestimmt:

$$-i\frac{\nu}{c}\mathfrak{M} = \operatorname{curl}\mathfrak{E}.$$

Wegen $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$ und weil die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$ am Rande verschwinden, muß auch die Normalkomponente von $\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial n}$ am Rande gleich Null sein. Daher folgt aus (I.):

$$\text{(II.)} \quad \begin{cases} \Delta E_x + \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 E_x = 0, \ \Delta E_y + \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 E_y = 0, \ \Delta E_z + \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 E_z = 0\text{: im Innern,} \\ E_x : E_y : E_z = X : Y : Z, \qquad X\frac{\partial E_x}{\partial n} + Y\frac{\partial E_y}{\partial n} + Z\frac{\partial E_z}{\partial n} = 0\text{: am Rande.} \end{cases}$$

Die Eigenwerte $\left(\frac{\nu}{c}\right)^2$ dieses Problems sollen σ' heißen; man überzeugt sich in bekannter Weise sogleich davon, daß alle σ' positiv sind. Die σ bilden nur einen Teil der σ'. Haben nämlich $\varkappa_i, u_i$ die in § 2 festgesetzte Bedeutung (für den Raum), so ist immer

$$\mathfrak{E}_i = \operatorname{grad} u_i$$

eine zu $\left(\frac{\nu}{c}\right)^2 = \sigma' = \varkappa_i$ gehörige Lösung von (II.). Denn dieser Vektor steht (wegen der Randbedingung $u_i = 0$) am Rande senkrecht auf der Oberfläche.

Außerdem ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{E}_i = \operatorname{div} \operatorname{grad} u_i = \Delta u_i = -\varkappa_i u_i .$$

Es verschwindet also $\operatorname{div} \mathfrak{E}_i$ am Rande, und darum ist auch die letzte Randbedingung in (II.) erfüllt. Hingegen verschwindet $\operatorname{div} \mathfrak{E}_i$ nicht im Innern, und $\mathfrak{E}_i$ kann also nicht als Lösung des Strahlungsproblems (I.) angesprochen werden.

Ist σ' ein l-facher Eigenwert von (II.), dagegen keinem der $\varkappa_i$ gleich, so ist σ' auch ein l-facher Eigenwert von (I.). Unter diesen Umständen folgt nämlich für jeden zu σ' gehörigen Eigenvektor $\mathfrak{E} = (E_x, E_y, E_z)$ von (II.), daß $\operatorname{div} \mathfrak{E} = u$ eine am Rande verschwindende Lösung von $\Delta u + \sigma' u = 0$ ist, also identisch verschwindet.

Ist jedoch σ' nicht nur ein l-facher Eigenwert von (II.), sondern finden sich unter den $\varkappa_i$ im ganzen h, etwa $\varkappa_{m+1}, \varkappa_{m+2}, \dots \varkappa_{m+h}$, die gleich σ' sind, so muß $l \geqq h$ sein, und σ' ist ein $(l-h)$-facher Eigenwert des Strahlungsproblems. Denn

$$\mathfrak{E}_{m+1} = \operatorname{grad} u_{m+1}, \dots \mathfrak{E}_{m+h} = \operatorname{grad} u_{m+h}$$

sind h linear unabhängige zu σ' gehörige Eigenvektoren von (II.). Ist $\mathfrak{E}$ irgend ein zu σ' gehöriger Eigenvektor von (II.) und setzen wir

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = -\sigma' \cdot u,$$

so muß u gleich einer mit gewissen Konstanten c_i gebildeten linearen Kombination

$$c_{m+1} u_{m+1} + \dots + c_{m+h} u_{m+h}$$

sein.

$$\tilde{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E} - c_{m+1} \mathfrak{E}_{m+1} - \dots - c_{m+h} \mathfrak{E}_{m+h}$$

ist dann ein Eigenvektor des Strahlungsproblems. Daraus ergibt sich unsere Behauptung.

Wir werden jetzt beweisen, daß unterhalb einer beliebigen Grenze mindestens dreimal so viel Eigenwerte σ' als $\varkappa_i$ gelegen sind. Daraus werden wir dann zu schließen haben:

Unterhalb einer beliebigen Grenze liegen mindestens doppelt so viel Eigenwerte des Strahlungsproblems als zu der Randbedingung $u = 0$ gehören.

Wir führen (II.) auf eine Integralgleichung zurück, wenn wir zunächst die inhomogenen Gleichungen

$$\Delta E_x = -4\pi e_x, \quad \Delta E_y = -4\pi e_y, \quad \Delta E_z = -4\pi e_z,$$

in denen $\mathfrak{e} = (e_x, e_y, e_z)$ ein gegebenes Vektorfeld bedeutet, unter den in

(II.) verzeichneten Randbedingungen durch Gleichungen von der folgenden Form integrieren:

$$E_x(p) = \int G_{xx}(pp')\,e_x(p')\,dp' + \int G_{xy}(pp')\,e_y(p')\,dp' + \int G_{xz}(pp')\,e_z(p')\,dp',$$

$$E_y(p) = \int G_{yx}(pp')\,e_x(p')\,dp' + \int G_{yy}(pp')\,e_y(p')\,dp' + \int G_{yz}(pp')\,e_z(p')\,dp',$$

$$E_z(p) = \int G_{zx}(pp')\,e_x(p')\,dp' + \int G_{zy}(pp')\,e_y(p')\,dp' + \int G_{zz}(pp')\,e_z(p')\,dp'.$$

Die Konstruktion des „*Greenschen Tensors*“

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{Vmatrix}$$

gelingt, wie ich in (A.), § 6 auseinandergesetzt habe, mit Hilfe der *Robin-Neumann*schen Methoden der Potentialtheorie sicher dann, wenn $\mathfrak{O}$ dreimal stetig differenzierbar ist. Γ ist symmetrisch [z. B. ist $G_{xy}(pp') = G_{yx}(p'p)$], und es wird gemäß den geforderten Randbedingungen

$$(17.)\qquad \left.\begin{matrix} G_{xx}(op') \\ = G_{xx}(p'o) \end{matrix}\right\} = X(o)\,G_x(p'o), \qquad \left.\begin{matrix} G_{yx}(op') \\ = G_{xy}(p'o) \end{matrix}\right\} = Y(o)\,G_x(p'o),$$

$$\left.\begin{matrix} G_{zx}(op') \\ = G_{xz}(p'o) \end{matrix}\right\} = Z(o)\,G_x(p'o),$$

wo G_x eine gewisse Funktion der beiden angegebenen Argumente ist; ferner

$$(18.)\qquad \begin{aligned} &X(o)\frac{\partial}{\partial n_o}G_{xx}(op') + Y(o)\frac{\partial}{\partial n_o}G_{yx}(op') + Z(o)\frac{\partial}{\partial n_o}G_{zx}(op') \\ &= X(o)\frac{\partial}{\partial n_o}G_{xx}(p'o) + Y(o)\frac{\partial}{\partial n_o}G_{xy}(p'o) + Z(o)\frac{\partial}{\partial n_o}G_{xz}(p'o) \end{aligned} = 0$$

und weitere analoge Gleichungen, in denen der Index x durch y, bzw. z ersetzt ist.

Die σ' sind die Eigenwerte von $\frac{1}{4\pi}\cdot\Gamma$. Die neun Funktionen des Tensors

$$\mathsf{A} = \begin{Vmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{Vmatrix}$$

sind bei festem p' hinsichtlich p innerhalb J reguläre Potentialfunktionen. Da die Eigenwerte der hier von Γ zu subtrahierenden Kernmatrix aus den Eigenwerten $\frac{\varkappa_i}{4\pi}$ von G dadurch entstehen, daß jeder derselben dreimal gezählt wird, so haben wir nur zu zeigen, daß A positiv-definit ist. Dazu verwenden wir genau die in (C.) § 5 angegebene Methode.

Es sei also $\mathfrak{u} = (u_x, u_y, u_z)$ ein zu dem Eigenwert $\frac{\alpha}{4\pi}$ gehöriger Eigenvektor von A. Für die Randwerte des im Innern von J regulären Vektorpotentials $\mathfrak{u}$ erhalten wir dann zufolge $G(op') = 0$ und der Gleichungen (17.)

$$4\pi u_x(o) = \alpha X(o) t(o), \quad 4\pi u_y(o) = \alpha Y(o) t(o), \quad 4\pi u_z(o) = \alpha Z(o) t(o),$$

$$t(o) = \int G_x(p'o) u_x(p')\, dp' + \int G_y(p'o) u_y(p')\, dp' + \int G_z(p'o) u_z(p')\, dp'.$$

Führt man ferner

$$X(o)\frac{\partial u_x}{\partial n_o} + Y(o)\frac{\partial u_y}{\partial n_o} + Z(o)\frac{\partial u_z}{\partial n_o} = f(o)$$

ein, so wird

$$(18.)\quad \int \left\{ \left|\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z}\right|^2 \right\} dp = -\int \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial n} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial n} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial n} \right) do$$
$$= -\frac{\alpha}{4\pi} \int t(o) f(o)\, do.$$

Man kann aber $t(o)$ durch $f(o)$ ausdrücken. Dazu benutzen wir die *Green*schen Formeln

$$\int \left(u_x(o) \frac{\partial}{\partial n_o} G_{xx}(po) - G_{xx}(po) \frac{\partial u_x}{\partial n_o} \right) do = 4\pi u_x(p),$$

$$\int \left(u_y(o) \frac{\partial}{\partial n_o} G_{xy}(po) - G_{xy}(po) \frac{\partial u_y}{\partial n_o} \right) do = 0,$$

$$\int \left(u_z(o) \frac{\partial}{\partial n_o} G_{xz}(po) - G_{xz}(po) \frac{\partial u_z}{\partial n_o} \right) do = 0.$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so kommt

$$(19.)\qquad 4\pi u_x(p) = -\int G_x(po) f(o)\, do.$$

Analoges gilt für $u_y(p)$, $u_z(p)$. Durch Einsetzen in die Definition von $t(o)$ erhalten wir

$$(20.)\quad 4\pi t(o) = -\int [G_x G_x(oo') + G_y G_y(oo') + G_z G_z(oo')] f(o')\, do'$$
$$\left\{ G_x G_x(oo') = \int_J G_x(po) G_x(po')\, dp, \ldots \right\}.$$

Aus (19.) schließen wir aber auch

$$16\pi^2 \cdot \int_J u_x^2(p)\, dp = \iint_{\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}} G_x G_x(oo') f(o) f(o')\, do\, do'.$$

Setzt man den Ausdruck (20.) in (18.) ein, so verwandelt sich dieser daher in

$$\alpha \int_J (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, dp = \alpha \cdot \int_J |\mathfrak{u}|^2\, dp.$$

Damit ist bewiesen, daß $\alpha > 0$ und die Kernmatrix A also positiv-definit ist.

§ 5.

Bis jetzt haben wir für die Anzahl der Spektrallinien im Spektrum der Hohlraumstrahlung nur eine untere Grenze ermittelt. Eine obere Grenze liefert der folgende Satz:

Die Anzahl der unterhalb einer beliebigen Grenze gelegenen Eigenwerte σ des Strahlungsproblems ist höchstens um 1 *größer als die doppelte Anzahl der unter dieser Grenze gelegenen, der Randbedingung* $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ *zugehörigen Eigenwerte* ϱ_i.

Dabei ist $\varrho_0 = 0$ immer mitzuzählen.

Zum Nachweis dieses Satzes untersuchen wir die magnetische Feldstärke, d. i. den Vektor $\mathfrak{M} = (M_x, M_y, M_z)$. Er ist am Rande tangential gerichtet, seine normale Ableitung $\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial n}$ hingegen (wie man aus der Gleichung

$$i \frac{\nu}{c} \mathfrak{E} = \operatorname{curl} \mathfrak{M}$$

ersieht) normal gerichtet. Die σ sind also unter den Eigenwerten σ'' des folgenden Problems enthalten:

$$\text{(III.)} \begin{cases} \Delta M_x + \sigma'' M_x = 0, \ \Delta M_y + \sigma'' M_y = 0, \ \Delta M_z + \sigma'' M_z = 0\text{: innerhalb } J, \\ \dfrac{\partial M_x}{\partial n} : \dfrac{\partial M_y}{\partial n} : \dfrac{\partial M_z}{\partial n} = X : Y : Z, \quad X M_x + Y M_y + Z M_z = 0\text{: am Rande.} \end{cases}$$

Die σ'' sind gleichfalls alle positiv, und wie im vorigen Paragraphen die σ' dadurch hervorgingen, daß man zu den σ noch die $\varkappa_i$ hinzufügte, so erhalten wir die Reihe der σ'' dadurch, daß wir in diese Reihe neben den σ die ϱ_i, außer $\varrho_0 = 0$, aufnehmen. Es bleibt also zu beweisen: Unterhalb einer beliebigen Grenze liegen höchstens dreimal so viel σ'' als ϱ_i (einschließlich $\varrho_0 = 0$).

Wir können die σ'' wiederum als die Eigenwerte einer gewissen symmetrischen Kernmatrix

$$\frac{1}{4\pi} \mathsf{H} = \frac{1}{4\pi} \begin{Vmatrix} H_{xx} & H_{xy} & H_{xz} \\ H_{yx} & H_{yy} & H_{yz} \\ H_{zx} & H_{zy} & H_{zz} \end{Vmatrix}$$

auffassen, deren Konstruktion ganz analog wie die von Γ verläuft. Die Elemente einer Kolonne erfüllen die in (III.) verzeichneten Randbedingungen.

H, H^* sollen die frühere Bedeutung haben. Aus H können wir uns eine andere symmetrische Kernmatrix H^*_* verschaffen, die zu den drei Vektoren

$$\mathfrak{1}_x = (1,0,0), \qquad \mathfrak{1}_y = (0,1,0) \qquad \mathfrak{1}_z = (0,0,1)$$

orthogonal ist, im übrigen aber für alle Vektoren $\mathfrak{u}$, die ihrerseits zu diesen dreien orthogonal sind, die Gleichung

$$\mathsf{H}^{**}_{**}\langle\mathfrak{u}\rangle = \mathsf{H}\langle\mathfrak{u}\rangle$$

befriedigt (vgl. § 1). Wenngleich die in der Hauptdiagonale von H^{**}_{**} stehenden Elemente ebensowenig wie H^* bei festem p' hinsichtlich p Potentialfunktionen sind, besteht doch die Matrix

$$\mathsf{B} = \begin{Vmatrix} H^* & 0 & 0 \\ 0 & H^* & 0 \\ 0 & 0 & H^* \end{Vmatrix} - \mathsf{H}^{**}_{**}$$

aus lauter innerhalb J regulären Potentialfunktionen. Wir wollen zeigen, daß sie positiv-definit ist.

Für einen zu dem Eigenwert $\frac{\beta}{4\pi}$ gehörigen Eigenvektor $\mathfrak{u} = (u_x, u_y, u_z)$ von B erhalten wir nämlich folgende Formeln:

$$\int u_x\,dp = 0, \qquad \int u_y\,dp = 0, \qquad \int u_z\,dp = 0;$$

innerhalb J: $\qquad \Delta u_x = 0, \qquad \Delta u_y = 0, \qquad \Delta u_z = 0,$

am Rand: $\dfrac{\partial u_x}{\partial n_o} = X(o)\tau(o), \quad \dfrac{\partial u_y}{\partial n_o} = Y(o)\tau(o), \quad \dfrac{\partial u_z}{\partial n_o} = Z(o)\tau(o),$

wo $\tau(o)$ eine stetige Funktion auf der Oberfläche ist. Setzt man noch

$$X(o)u_x(o) + Y(o)u_y(o) + Z(o)u_z(o) = \varphi(o),$$

dann ist

$$\int\left(\left|\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial z}\right|^2\right)dp = -\int\varphi(o)\tau(o)\,do.$$

Um $\varphi(o)$ aus $\tau(o)$ zu berechnen, haben wir zunächst

$$(21.) \qquad 4\pi u_x(p) = -\int H^*(po)\,X(o)\tau(o)\,do, \cdots.$$

Lassen wir in denjenigen Gleichungen, welche $\mathfrak{u}$ als Eigenvektor von B definieren, p in einen beliebigen Randpunkt o übergehen und ersetzen unter den Integralzeichen $u_x(p), \ldots$ durch die auf der rechten Seite von (21.) stehenden Ausdrücke, so wird

$$\varphi(o) = -\frac{\beta}{16\pi^2}\int H^*H^*(oo')\,|X(o)X(o') + Y(o)Y(o') + Z(o)Z(o')|\,\tau(o')\,do',$$

$$\left\{H^*H^*(oo') = \int_J H^*(op)H^*(o'p)\,dp\right\},$$

also

$$-\int \varphi(o)\tau(o)\,do = \frac{\beta}{16\pi^2}\sum_{x,y,z} H^* H^* \langle X\tau\rangle = \beta \int_J (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\,dp,$$

$$\beta > 0.$$

Unterhalb einer beliebigen Grenze liegen mithin höchstens dreimal so viel Eigenwerte von H^{**}_{**} als von H^*. Dadurch daß wir jetzt wieder H^{**}_{**} durch H ersetzen, wächst die Zahl der unterhalb dieser Grenze gelegenen Eigenwerte höchstens um 3, und die Anzahl der Eigenwerte von H unter einer gegebenen Grenze ist höchstens dreimal so groß wie die Anzahl der ϱ_i, wenn wir dabei auch $\varrho_0 = 0$ (das nicht als Eigenwert von H^* auftritt) mitzählen.

Damit haben wir die Zahl der Spektrallinien der Hohlraumstrahlung in Grenzen eingeschlossen. Aus ihnen erhalten wir insbesondere *das asymptotische Gesetz*, das wir so aussprechen können:

Die Zahl der Spektrallinien im Spektrum der Hohlraumstrahlung, deren Frequenz $< \nu$ ist, wächst mit ν so stark wie die dritte Potenz von ν. Genauer gesagt, konvergiert das Verhältnis dieser Anzahl zu ν^3 für $\lim \nu = \infty$ *gegen die Grenze*

$$\frac{\text{Volumen des Hohlraums}}{3\pi^2 c^3}.$$

Zur Theorie der nicht linearen Differential- und Differenzengleichungen.

Von Herrn *J. Horn* in Darmstadt.

Im 138. Bande dieses Journals (1910) habe ich gezeigt, daß die in der Theorie der Differentialgleichungen so wirksame Methode der sukzessiven Annäherungen auch benutzt werden kann, um das Verhalten der Integrale linearer Differenzengleichungen für große Werte der Veränderlichen zu untersuchen*). Bei dem Interesse, welches die lange Zeit wenig beachtete Theorie der linearen Differenzengleichungen neuerdings erweckt hat**), dürfte es gerechtfertigt sein zu zeigen, daß die in der erwähnten Arbeit benutzte Methode eine Übertragung auf nicht lineare Differenzengleichungen gestattet.

Ich betrachte ein System von Differenzengleichungen von der Form

$$(\alpha.) \qquad x^{-k} y_i(x+1) = G_i(x, y_1(x), \dots y_m(x)), \qquad (i=1, \dots m)$$

wo k gleich Null oder gleich einer ganzen positiven Zahl und G_i eine an der Stelle $x = \infty$, $y_1 = 0, \dots y_m = 0$ verschwindende, in der Umgebung dieser Stelle reguläre Funktion von $x, y_1 = y_1(x), \dots y_m = y_m(x)$ ist; x durchläuft die Werte $x_0, x_0 + 1, x_0 + 2, \dots$, wo x_0 als reelle (wenn man will, als ganze positive Zahl) angenommen werden kann, während die übrigen Größen

*) Vgl. auch die a. a. O. zitierten Arbeiten von *Dini* und *Ford.*

**) Vgl. das Buch von *Wallenberg* und *Guldberg*, Theorie der linearen Differenzengleichungen, Leipzig und Berlin 1911, auf welches inbetreff der Literatur verwiesen sei.

komplex sein dürfen*). Diejenigen Lösungen $y_1, \dots y_m$, für welche $\lim_{x=\infty} y_i = 0$ $(i = 1, \dots m)$ ist, werden vermittelst sukzessiver Annäherung durch unendliche Reihen dargestellt, aus welchen sich ihr Verhalten für große x ergibt.

Diesen Untersuchungen über Differenzengleichungen entsprechen Untersuchungen über Systeme nicht linearer Differentialgleichungen von der Form

$$(\beta.) \qquad x^{-k} \frac{dy_i}{dx} = G_i(x, y_1, \dots y_m), \qquad (i=1, \dots m)$$

wo k und G_i dieselbe Bedeutung haben wie oben; es handelt sich um das Verhalten der Lösungen $y_1, \dots y_m$, für welche $\lim_{x=\infty} y_i = 0$ ist, für große Werte von x. Untersuchungen dieser Art habe ich für eine einzige nicht lineare Differentialgleichung erster Ordnung bereits im 118. und 119. Bd. dieses Journals und im 51. Bd. der Math. Ann. geführt.

Im ersten Abschnitt behandle ich vermittelst sukzessiver Annäherungen die Lösungen des Differentialsystems $(\beta.)$ für große Werte von x oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Lösungen des Systems

$$x^{k+1} \frac{dy_i}{dx} = G_i(x, y_1, \dots y_m), \qquad (i=1, \dots m)$$

wo $k \geqq 1$ eine ganze positive Zahl und G_i eine für $x = 0, y_1 = 0, \dots y_m = 0$ verschwindende, in der Umgebung dieser Stelle reguläre Funktion darstellt,

*) In der angeführten Arbeit im 138. Bd. dies. Journ. (ebenso wie in einer Arbeit im 53. Bd. der Math. Ann., in welcher ich die den *Thomé*schen Normalreihen entsprechenden divergenten Reihen für die Integrale einer linearen Differenzengleichung eingeführt habe) durchläuft die Veränderliche x die Reihe reeller Werte $x_0, x_0 + 1, x_0 + 2, \dots$, während in neuester Zeit von *Galbrun*, *Nörlund* (dieser verwendet an Stelle der divergenten Potenzreihen Fakultätenreihen, welche wenigstens in manchen Fällen konvergent sind), *Carmichael* und *Birkhoff* die analytischen Lösungen linearer Differenzengleichungen für beliebige komplexe x untersucht worden sind. Übrigens werden auch bei den Methoden von *Carmichael* und *Birkhoff* (Transact. of the Amer. Math. Soc. 1911) für Systeme linearer Differenzengleichungen sukzessive Annäherungen benutzt; man könnte auch im Anschluß an die von mir im 138. Bd. angewandte Methode durch Einführung komplexer x und Benutzung des *Carmichael-Birkhoff*schen Integralausdrucks für $\sum_{x_0}^{x} f(x)$ zu Sätzen über die analytischen Lösungen einer linearen Differenzengleichung höherer Ordnung gelangen, welche den unter durchgehender Verwendung der Matrizenrechnung abgeleiteten Sätzen *Birkhoff*s über Systeme linearer Differenzengleichungen entsprechen.

für kleine reelle positive Werte von x*). Das Differenzengleichungssystem ($\alpha.$) wird im zweiten Abschnitt für $k = 0$ und im dritten Abschnitt für $k > 0$ behandelt**).

Erster Abschnitt.

§ 1.

In dem System nicht linearer Differentialgleichungen

$$x^{k+1}\frac{dy_i}{dx} = G_i(x, y_1, \dots y_m) \qquad (i=1, \dots m)$$

sei k eine der Zahlen $1, 2, 3, \dots$ und G_i eine Funktion von $x, y_1, \dots y_m$, welche in der Umgebung der Stelle $x = 0, y_1 = 0, \dots y_m = 0$ regulär ist und an dieser Stelle verschwindet:

$$G_i(x, y_1, \dots y_m) = a_{i0}x + a_{i1}y_1 + \cdots + a_{im}y_m + \cdots.$$

Wenn die Determinante

$$|a_{ij} - s\delta_{ij}| \qquad (i, j=1, \dots m)$$

die Elementarteiler $s - a_1, \dots s - a_m$ besitzt, so erreicht man dadurch, daß man $y_1, \dots y_m$ durch geeignete lineare homogene Verbindungen mit konstanten Koeffizienten ersetzt, daß $a_{ii} = a_i$, $a_{ij} = 0$ $(i \gtrless j)$ wird.

Wir betrachten demgemäß das Differentialsystem

$$(A.) \qquad x^{k+1}\frac{dy_i}{dx} = a_i y_i + f_i(x, y_1, \dots y_m), \qquad (i=1, \dots m)$$

in welchem

$$f_i(x, y_1, \dots y_m) = \Sigma A^{(i)}_{\lambda, \lambda_1, \dots \lambda_m} x^\lambda y_1^{\lambda_1} \cdots y_m^{\lambda_m} \quad \left(\begin{smallmatrix}\lambda=1, \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0;\\ \lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_m \geq 2\end{smallmatrix}\right)$$

---

*) Das Ergebnis von § 2 ist, wie ich nachträglich bemerke, schon von *Bendixson* (Arkiv för Mat., Astr. och Fys., Bd. 5, Nr. 21, 1909) vermittelst sukzessiver Annäherungen hergeleitet in Verallgemeinerung früherer Untersuchungen von *Bendixson* über eine einzelne Differentialgleichung erster Ordnung (Öfversigt Stockholm 1898, S. 69 ff.: Act. math., Bd. 24, S. 81 ff.). Auch *R. Birkeland* (Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Bd. 30, Nr. 1, 1909; Comptes Rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 24. Mai 1909) hat verwandte Untersuchungen geführt. — Die Darstellung von §§ 1—2 mußte indessen als Anknüpfungspunkt für die weiteren Untersuchungen beibehalten werden. Auf der Benutzung von Integralgleichungen an Stelle der Differentialgleichungen beruht die Beweismethode von § 5, welche auch in anderen Fällen asymptotischer Darstellung anwendbar ist. — Die asymptotische Darstellung der Integrale einer nicht linearen Differentialgleichung durch eine divergente Potenzreihe ist schon in meinen S. 183 im Text zitierten Arbeiten auf mehrere Arten bewiesen.

**) Die Beschränkung auf reelle positive x, die hier der Einfachheit halber beibehalten wird, ist nicht durch die angewandte Methode bedingt.

ist; $k \geqq 1$ *ist eine ganze Zahl, und* $a_1, \dots a_m$ *erfüllen die Bedingungen*

$$\bar{a}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{a}_\mu > 0 > \bar{a}_{\mu+1} \geqq \cdots \geqq \bar{a}_m \text{*)}.$$

Das System linearer Differentialgleichungen

$$x^{k+1} \frac{dy_i}{dx} = a_i y_i + \varphi_i(x), \qquad (i=1, \dots m)$$

wo $\varphi_i(x)$ für $0 < x \leqq x_0$ (x_0 reell positiv) stetig ist und unter einer endlichen Schranke bleibt, hat die allgemeine Lösung

$$y_i = c_i e^{-\frac{a_i}{k x^k}} + e^{-\frac{a_i}{k x^k}} \int_{\xi_i}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{k x^k}}}{x^{k+1}} \varphi_i(x)\, dx \qquad (i=1, \dots m)$$

mit den willkürlichen Konstanten $c_1, \dots c_m$; dabei ist

$$\xi_i = x_0 \ (i = 1, \dots \mu); \ \xi_i = 0 \ (i = \mu + 1, \dots m).$$

Indem wir unter x_0 und h hinreichend kleine positive Größen verstehen (s. § 2), betrachten wir eine Lösung des Differentialsystems (A.), welche die Bedingung erfüllt:

$$|y_i| \leqq h \text{ für } 0 < x \leqq x_0. \qquad (i=1, \dots m)$$

Aus dem System (A.) ergibt sich, indem $\varphi_i(x) = f_i(x, y_1, \dots y_m)$ gesetzt wird, das System der Integralgleichungen

$$y_i = c_i e^{-\frac{a_i}{k x^k}} + e^{-\frac{a_i}{k x^k}} \int_{\xi_i}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{k x^k}}}{x^{k+1}} f_i(x, y_1, \dots y_m)\, dx \qquad (i=1, \dots m)$$

mit den Konstanten $c_1, \dots c_m$. Wenn für $0 \leqq x \leqq x_0$, $|y_1| \leqq h, \dots |y_m| \leqq h$ der absolute Betrag von $f_i(x, y_1, \dots y_m)$ kleiner als M ist, ist für $0 < x \leqq x_0$, wenn i eine der Zahlen $\mu + 1, \dots m$ bedeutet,

$$\left| e^{-\frac{a_i}{k x^k}} \int_0^x \frac{e^{\frac{a_i}{k x^k}}}{x^{k+1}} f_i(x, y_1, \dots y_m)\, dx \right| < M e^{-\frac{\bar{a}_i}{k x^k}} \int_0^x \frac{e^{\frac{\bar{a}_i}{k x^k}}}{x^{k+1}} dx = \frac{M}{-\bar{a}_i};$$

da $\lim\limits_{x=+0} e^{-\frac{\bar{a}_i}{k x^k}} = \infty$ $(i = \mu + 1, \dots m)$ ist, so kann, wenn c_i $(i = \mu + 1, \dots m)$ von Null verschieden ist, die Bedingung $|y_i| \leqq h$ nicht erfüllt sein.

Eine Lösung des Differentialsystems (A.) mit der angegebenen Eigenschaft genügt also den Integralgleichungen

*) Der reelle Teil der komplexen Größe a ist mit $\bar{a}$ bezeichnet.

$$(\text{B.}) \quad \begin{cases} y_i = c_i e^{-\frac{a_i}{k x^k}} + e^{-\frac{a_i}{k x^k}} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{k x^k}}}{x^{k+1}} f_i(x, y_1, \dots y_m)\, dx, & (i=1, \dots \mu) \\ y_i = e^{-\frac{a_i}{k x^k}} \int_{0}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{k x^k}}}{x^{k+1}} f_i(x, y_1, \dots y_m)\, dx; & (i=\mu+1, \dots m) \end{cases}$$

dabei ist

$$\eta_i = c_i e^{-\frac{a_i}{k x_0^k}} \qquad (i=1, \dots \mu)$$

der Wert, welchen y_i für $x = x_0$ annimmt. Umgekehrt gehen aus den Integralgleichungen (B.) wieder die Differentialgleichungen (A.) hervor.

Die Integralgleichungen (B.) lösen wir durch sukzessive Näherungen, *indem wir* $y_i^{(0)} = 0$ *und, wenn* ν *eine der Zahlen* $1, 2, 3, \dots$ *bedeutet,*

$$(\text{B}^{(\nu)}.) \quad \begin{cases} y_i^{(\nu)} = c_i e^{-\frac{a_i}{k x^k}} + e^{-\frac{a_i}{k x^k}} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{k x^k}}}{x^{k+1}} f_i(x, y_1^{(\nu-1)}, \dots y_m^{(\nu-1)})\, dx, & (i=1, \dots \mu) \\ y_i^{(\nu)} = e^{-\frac{a_i}{k x^k}} \int_{0}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{k x^k}}}{x^{k+1}} f_i(x, y_1^{(\nu-1)}, \dots y_m^{(\nu-1)})\, dx & (i=\mu+1, \dots m) \end{cases}$$

setzen. Wenn die Bezeichnung

$$u_i^{(\nu)} = y_i^{(\nu)} - y_i^{(\nu-1)} \qquad (\nu=1, 2, 3, \dots)$$

benutzt wird, ist $u_i^{(1)} = y_i^{(1)}$ *und für* $\nu = 2, 3, \dots$

$$(\text{C}^{(\nu)}.) \quad u_i^{(\nu)} = e^{-\frac{a_i}{k x^k}} \int_{\xi_i}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{k x^k}}}{x^{k+1}} [f_i(x, y_1^{(\nu-1)}, \dots y_m^{(\nu-1)}) - f_i(x, y_1^{(\nu-2)}, \dots y_m^{(\nu-2)})]\, dx. \qquad (i=1, \dots m)$$

Wir weisen in § 2 nach, daß die Reihen

$$y_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_i^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} y_i^{(\nu)} \qquad (i=1, \dots m)$$

für $0 < x \leqq x_0$ konvergent sind und sowohl den Gleichungen (B.) als auch den Gleichungen (A.) genügen, wenn x_0 und die absoluten Beträge von $\eta_1, \dots \eta_\mu$ hinreichend klein angenommen werden.

§ 2.

Die positive Größe q soll die Bedingungen erfüllen:

$$q \leqq \frac{\bar{a}_\mu}{4} \leqq \frac{\bar{a}_i}{4} \text{ *)}, \qquad (i=1, \dots \mu)$$

$$q \leqq -\bar{a}_{\mu+1} \leqq -\bar{a}_i. \qquad (i=\mu+1, \dots m)$$

Dann ist für $0 < x \leqq x_0$

$$\int_x^{x_0} \frac{e^{\overline{k x^k}}}{x^{k+1}}\, dx = \frac{1}{\bar{a}_i}\left(e^{\overline{k x^k}} - e^{\overline{k x_0^k}}\right) < \frac{1}{\bar{a}_i}\, e^{\overline{k x^k}} < \frac{1}{2q}\, e^{\overline{k x^k}}, \qquad (i=1, \dots \mu)$$

$$\int_0^x \frac{e^{\overline{k x^k}}}{x^{k+1}}\, dx = -\frac{1}{\bar{a}_i}\, e^{\overline{k x^k}} \leqq \frac{1}{q}\, e^{\overline{k x^k}}. \qquad (i=\mu+1, \dots m)$$

Die Potenzreihe $f_i(x, y_1, \dots y_m)$ geht, wenn man sämtliche Koeffizienten durch ihre absoluten Beträge ersetzt, in

$$F_i(x, y_1, \dots y_m) = \sum |A^{(i)}_{\lambda, \lambda_1, \dots \lambda_m}|\, x^\lambda y_1^{\lambda_1} \cdots y_m^{\lambda_m}$$
$$(\lambda = 1, \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0;\ \lambda + \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \geq 2)$$

über. Wir denken uns F_i auf irgend eine Weise in der Form

$$F_i(x, y_1, \dots y_m) = F_i(x, 0, \dots 0) + \sum_{j=1}^{m} y_j F_{ij}(x, y_1, \dots y_m)$$

dargestellt, wo F_{ij} eine Potenzreihe von $x, y_1, \dots y_m$ und $F_{ij}(0, 0, \dots 0) = 0$ ist. Man wählt die positiven Größen x_0 und h so klein, daß $F_{ij}(x_0, h, \dots h) \leqq \frac{q}{2m}$ ist; durch Verkleinerung von x_0 unter Beibehaltung von h erreicht man dann, daß $F_i(x_0, 0, \dots 0) \leqq \frac{hq}{2}$ wird. Dann ist $F_i(x_0, h, \dots h) \leqq hq$, also für $0 \leqq x \leqq x_0$, $|y_1| \leqq h, \dots |y_m| \leqq h$

$$|f_i(x, y_1, \dots y_m)| \leqq hq.$$

Ferner kann man schreiben:

$$f_i(x, y_1', \dots y_m') - f_i(x, y_1, \dots y_m) = \sum_{j=1}^{m} (y_j' - y_j)\, g_{ij}(x, y_1, \dots y_m, y_1', \dots y_m'),$$

wo g_{ij} eine Potenzreihe ist, welche für $x = y_1 = \cdots = y_1' = \cdots = 0$ verschwindet; g_{ij} geht, wenn man alle Koeffizienten durch ihre absoluten Beträge ersetzt, in $G_{ij}(x, y_1, \dots y_1' \dots)$ über. Die positive Größe g erfülle die Bedingung

$$\frac{mg}{q} < 1.$$

Wir wählen x_0 und h so klein, daß $G_{ij}(x_0, h, \dots h, \dots) \leqq g$ ist; dann ist

*) In § 2 wäre es ausreichend, $q \leqq \frac{\bar{a}_\mu}{2}$ zu setzen; von der Bedingung $q \leqq \frac{\bar{a}_\mu}{4}$ wird erst in den folgenden Paragraphen Gebrauch gemacht.

$|g_{ij}(x, y_1, \dots y_1', \dots)| \leqq g$ für $0 \leqq x \leqq x_0, |y_1| \leqq h, \dots |y_1'| \leqq h, \dots,$ also

$$|f_i(x, y_1', \dots y_m') - f_i(x, y_1, \dots y_m)| \leqq g(|y_1' - y_1| + \dots + |y_m' - y_m|).$$

Wir können also positive Größen x_0 und h so bestimmen, daß

$$|f_i(x, y_1, \dots y_m)| \leqq h\,q \text{ für } 0 \leqq x \leqq x_0, |y_1| \leqq h, \dots |y_m| \leqq h;$$

$$|f_i(x, y_1', \dots y_m') - f_i(x, y_1, \dots y_m)| \leqq g(|y_1' - y_1| + \dots + |y_m' - y_m|)$$

$$\text{für } 0 \leqq x \leqq x_0, |y_1| \leqq h, \dots |y_1'| \leqq h, \dots$$

ist; dabei sind die positiven Größen q und g so gewählt, daß

$$q \leqq \frac{\bar{a}_\mu}{4}, \quad q \leqq -\bar{a}_{\mu+1}, \quad g < \frac{q}{m}$$

ist. Wir sagen dafür im folgenden: x_0 und h erfüllen die Bedingungen (a.)).*

Die Konstanten werden so gewählt, daß

$$|\eta_i| = |c_i| e^{-\frac{\bar{a}_i}{k x_0^k}} \leqq \frac{h}{2} \qquad (i = 1, \dots \mu)$$

ist.

Wir zeigen, daß unter den gemachten Voraussetzungen für $0 < x \leqq x_0$

$$|y_i^{(\nu)}| \leqq h, \quad |u_i^{(\nu)}| \leqq h\left(\frac{m g}{q}\right)^{\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, 3 \dots)$$

ist.

Unter der Annahme $|y_i^{(\nu-1)}| \leqq h$ ist, wenn immer $0 < x \leqq x_0$ ist, zufolge ($B^{(\nu)}$.) für $i = 1, \dots \mu$

$$|y_i^{(\nu)}| \leqq |c_i| e^{-\frac{\bar{a}_i}{k x_0^k}} + h\,q\,e^{-\frac{\bar{a}_i}{k x^k}} \int_x^{x_0} \frac{e^{\frac{\bar{a}_i}{k x^k}}}{x^{k+1}}\,dx$$

$$\leqq \frac{h}{2} + h\,q \cdot \frac{1}{2\,q} = h$$

und für $i = \mu + 1, \dots m$

$$|y_i^{(\nu)}| \leqq h\,q\,e^{-\frac{\bar{a}_i}{k x^k}} \int_0^x \frac{e^{\frac{\bar{a}_i}{k x^k}}}{x^{k+1}}\,dx \leqq h\,q \cdot \frac{1}{q} = h.$$

Unter der Annahme

$$|u_i^{(\nu-1)}| \leqq h\left(\frac{m g}{q}\right)^{\nu-2}$$

ist zufolge ($C^{(\nu)}$.) für $i = 1, \dots m$

$$|u_i^{(\nu)}| \leqq e^{-\frac{\bar{a}_i}{k x^k}} \int_{\xi_i}^x \frac{e^{\frac{\bar{a}_i}{k x^k}}}{x^{k+1}} g(|u_1^{(\nu-1)}| + \dots + |u_m^{(\nu-1)}|)\,|dx|$$

---

*) In § 2 braucht die Funktion f_i nicht analytisch zu sein, wenn nur die Bedingungen (*a.*) erfüllt sind.

$$\leqq m g h \left(\frac{mg}{q}\right)^{\nu-2} e^{-\frac{\bar{a}_i}{k x^k}} \int_{\xi_i}^{x} \frac{e^{\frac{\bar{a}_i}{k x^k}}}{x^{k+1}} |dx| \leqq h \left(\frac{mg}{q}\right)^{\nu-1}.$$

Da $y_i^{(0)} = 0$ und $u_i^{(1)} = y_i^{(1)}$ ist, so gelten die angegebenen Ungleichungen für alle ν.

Wegen $\frac{mg}{q} < 1$ ist die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_i^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} y_i^{(\nu)} = y_i$$

für $0 < x \leqq x_0$ absolut und gleichmäßig konvergent. Wenn wir da, wo im bisherigen eine Funktion $f(x)$ für $x = 0$ zunächst nicht definiert ist, unter $f(0)$ den Grenzwert $\lim_{x=+0} f(x)$ verstehen, können wir das Intervall $0 < x \leqq x_0$ durch das Intervall $0 \leqq x \leqq x_0$ ersetzen.

Wir weisen nach, daß $\lim_{x=+0} y_i^{(\nu)} = 0$ ist. Zunächst ist $y_i^{(0)} = 0$. Wenn $\lim_{x=+0} y_i^{(\nu-1)} = 0$ ist, so ist auch $\lim_{x=+0} f_i(x, y_1^{(\nu-1)}, \ldots y_m^{(\nu-1)}) = 0$. Dann ist nach Hilfssatz II (§ 3) für $i = 1, \ldots m$

$$\lim_{x=+0} e^{-\frac{a_i}{k x^k}} \int_{\xi_i}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{k x^k}}}{x^{k+1}} f_i(x, y_1^{(\nu-1)}, \ldots y_m^{(\nu-1)})\, dx = 0;$$

da auch $\lim_{x=+0} e^{-\frac{a_i}{k x^k}} = 0$ $(i = 1, \ldots \mu)$ ist, so ist nach $(\mathrm{B}^{(\nu)}.)$ $\lim_{x=+0} y_i^{(\nu)} = 0$ $(i = 1, \ldots m)$.

Da $y_i^{(\nu)}$ für $\nu = \infty$ im Intervall $0 \leqq x \leqq x_0$ gleichmäßig gegen y_i konvergiert, so ist

$$\lim_{x=+0} y_i = 0. \qquad (i = 1, \ldots m)$$

Aus der Ungleichung $|y_i^{(\nu)}| \leqq h$ für $0 \leqq x \leqq x_0$ folgt

$$|y_i| \leqq h \quad (i = 1, \ldots m) \text{ für } 0 \leqq x \leqq x_0.$$

Da

$$\lim_{\nu=\infty} e^{-\frac{a_i}{k x^k}} \int_{\xi_i}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{k x^k}}}{x^{k+1}} f_i(x, y_1^{(\nu-1)}, \ldots y_m^{(\nu-1)})\, dx$$

$$= e^{-\frac{a_i}{k x^k}} \int_{\xi_i}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{k x^k}}}{x^{k+1}} f_i(x, y_1, \ldots y_m)\, dx$$

ist, so folgen aus den Gleichungen ($B^{(\nu)}$.) beim Grenzübergang $\lim \nu = \infty$ die Gleichungen (B.).

Wir können demnach den Satz aussprechen:

Wenn x_0 und h die Bedingungen (a.) erfüllen und wenn $|\eta_i| \leqq \frac{h}{2}$ $(i = 1, \dots \mu)$ ist, stellen die für $0 \leqq x \leqq x_0$ absolut und gleichmäßig konvergenten Reihen

$$y_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_i^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} y_i^{(\nu)} \qquad (i=1, \dots m)$$

eine Lösung des Differentialsystems (A.) mit den Eigenschaften

$$\lim_{x=+0} y_i = 0, \qquad (i=1, \dots m)$$

$$|y_i| \leqq h \ (i = 1, \dots m) \text{ für } 0 \leqq x \leqq x_0,$$

$$y_i = \eta_i \ (i = 1, \dots \mu) \text{ für } x = x_0$$

dar.

Die Integralgleichungen (B.) besitzen, wenn $c_1, \dots c_\mu$ gegebene Werte haben, nur eine einzige Lösung $y_1, \dots y_m$ mit der Eigenschaft: $|y_i| \leqq h$ $(i = 1, \dots m)$ für $0 \leqq x \leqq x_0$. Denn ist $y_1', \dots y_m'$ eine andere Lösung mit derselben Eigenschaft, so genügen die Differenzen $z_i = y_i' - y_i$ $(i = 1, \dots m)$ den Gleichungen

$$z_i = e^{-\frac{a_i}{k x^k}} \int_{\xi_i}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{k x^k}}}{x^{k+1}} [f_i(x, y_1', \dots) - f_i(x, y_1, \dots)] dx.$$

Da wegen $|z_i| \leqq 2h$

$$|f_i(x, y_1', \dots) - f_i(x, y_1, \dots)| \leqq g(|z_1| + \cdots + |z_m|) \leqq 2mgh$$

ist, so ist

$$|z_i| \leqq 2mgh \cdot e^{-\frac{\bar{a}_i}{k x^k}} \int_{\xi_i}^{x} \frac{e^{\frac{\bar{a}_i}{k x^k}}}{x^{k+1}} |dx| \leqq 2mgh \cdot \frac{1}{q} = 2h \cdot \frac{mg}{q}.$$

Durch n-malige Anwendung dieser Schlußweise erhält man

$$|z_i| \leqq 2h\left(\frac{mg}{q}\right)^n.$$

Wegen $\frac{mg}{q} < 1$ ist $\lim_{n=\infty}\left(\frac{mg}{q}\right)^n = 0$, also $z_i \equiv 0$. Demnach stimmt die Lösung y_i' mit der früheren Lösung y_i überein.

Hätte das Differentialsystem (A.) außer der oben bestimmten Lösung $y_1, \dots y_m$ eine weitere Lösung $y_1', \dots y_m'$ mit den Eigenschaften

$$|y_i'| \leqq h \ (i = 1, \dots m) \text{ für } 0 \leqq x \leqq x_0,$$

$$y_i' = \eta_i = c_i e^{-\frac{a_i}{k x_0^k}} \ (i = 1, \dots \mu) \text{ für } x = x_0,$$

so wären die beiden Lösungen $y_1, \dots y_m$ und $y_1', \dots y_m'$ der Integralgleichungen (B.) mit gegebenen Konstanten $c_1, \dots c_\mu$ vorhanden, was sich als unmöglich ergeben hat.

Es gilt also der Satz:

Das Differentialsystem (A.) *hat nur eine Lösung mit den Eigenschaften:*

$$|y_i| \leqq h \ (i = 1, \dots m) \ \textit{für} \ 0 \leqq x \leqq x_0,$$

$$y_i = \eta_i \ (i = 1, \dots \mu) \ \textit{für} \ x = x_0.$$

§ 3.

Wir machen von den in § 4 der Arbeit „*Volterra*sche Integralgleichungen und Summengleichungen“ (Bd. 140 dieses Journals, S. 134 ff.) zusammengestellten Hilfssätzen Gebrauch, zu denen wir einige Ergänzungen hinzufügen.

Den a. a. O. S. 137, 138 bewiesenen Hilfssatz 3 sprechen wir etwas ausführlicher folgendermaßen aus:

„Wenn

$$\vartheta(x) = -\frac{\alpha}{k x^k} - \frac{\alpha_1}{(k-1)x^{k-1}} - \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{x}, \ \bar{\alpha} < 0$$

ist, so hat man für $0 < x \leqq x_0$

$$\int_{x_0}^{x} \left| e^{\vartheta(y)} y^\varrho \, dy \right| \leqq \gamma \left| e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1} \right|,$$

wo γ eine (von x_0 und x unabhängige) endliche Größe darstellt. Im Falle $\bar{\varrho} + k + 1 \leqq 0$ ist x_0 eine beliebige positive Größe, während im Falle $\bar{\varrho} + k + 1 > 0$

$$x_0 \leqq \sqrt[k]{\frac{-\bar{\alpha}}{2(\bar{\varrho} + k + 1)}}$$

angenommen wird.“*)

Dieser Satz läßt sich wie folgt erweitern:

„Wenn x_0 eine beliebige positive Größe und

---

*) A. a. O. S. 138, Zeile 8 und 10 ist $\sum_{\lambda=1}^{k}$ durch $\sum_{\lambda=1}^{k-1}$ zu ersetzen; Z. 12 muß heißen: „Es ist $\psi(u) \leqq 0$ im Falle $\bar{\varrho} + k + 1 \leqq 0$; im Falle $\bar{\varrho} + k + 1 > 0$ ist $\cdots$“; auf S. 135, Z. 9 von unten muß es heißen: $J \leqq \frac{1}{k} \int_0^\infty \cdots$.

$$\vartheta(x) = -\frac{\alpha}{kx^k} - \frac{\alpha_1}{(k-1)x^{k-1}} - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{x},\ \bar{\alpha} < 0$$

ist, so hat man für hinreichend kleine positive Werte von x

$$\int_{x_0}^{x} |e^{\vartheta(y)} y^{\varrho}\, dy| \leqq \gamma |e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}|,$$

wo γ eine endliche positive Größe darstellt."

Wenn entweder $\bar{\varrho} + k + 1 \leqq 0$ oder

$$\bar{\varrho} + k + 1 > 0,\ x_0 \leqq \sqrt[k]{\frac{-\bar{\alpha}}{2(\bar{\varrho}+k+1)}}$$

ist, so ist der ausgesprochene Satz im früheren Hilfssatz 3 enthalten; er gilt dann für $0 < x \leqq x_0$.

Im Falle

$$\bar{\varrho} + k + 1 > 0,\ x_0 > \sqrt[k]{\frac{-\bar{\alpha}}{2(\bar{\varrho}+k+1)}}$$

sei

$$\mathfrak{x}_0 = \sqrt[k]{\frac{-\bar{\alpha}}{2(\bar{\varrho}+k+1)}}.$$

Wir nehmen $0 < x \leqq \mathfrak{x}_0$ an. Es ist (nach Hilfssatz 3)

$$\int_{\mathfrak{x}_0}^{x} |e^{\vartheta(y)} y^{\varrho}\, dy| \leqq \gamma' |e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}|,$$

$$\int_{x_0}^{\mathfrak{x}_0} |e^{\vartheta(y)} y^{\varrho}\, dy| = \gamma'',$$

wo γ', γ'' endliche Größen sind. Demnach ist

$$\int_{x_0}^{x} |e^{\vartheta(y)} y^{\varrho}\, dy| = \int_{x_0}^{\mathfrak{x}_0} |e^{\vartheta(y)} y^{\varrho}\, dy| + \int_{\mathfrak{x}_0}^{x} |e^{\vartheta(y)} y^{\varrho}\, dy|$$

$$\leqq |e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}| \cdot (\gamma' + \gamma'' e^{-\bar{\vartheta}(x)} x^{-\bar{\varrho}-k-1}) \leqq \gamma |e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}|,$$

da $e^{-\bar{\vartheta}(x)} x^{-\bar{\varrho}-k-1}$ für $0 < x \leqq \mathfrak{x}_0$ unter einer endlichen Größe liegt.

Weiter gilt der Satz:

„Wenn x_0 eine beliebige positive Größe und

$$\vartheta(x) = -\frac{\alpha}{kx^k} - \frac{\alpha_1}{(k-1)x^{k-1}} - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{x},\ \bar{\alpha} < 0,$$

wenn $\varphi(x)$ für $0 < x \leqq x_0$ stetig und $\lim_{x=+0} \varphi(x) = 0$ ist, so ist

$$\lim_{x=+0} e^{-\vartheta(x)} x^{-\varrho-k-1} \int_{x_0}^{x} e^{\vartheta(y)} y^{\varrho} \varphi(y)\, dy = 0."$$

Für $0 < x \leqq \mathfrak{x}_0$, wo im Falle $\bar{\varrho} + k + 1 > 0$

$$\mathfrak{r}_0 \leqq \sqrt[k]{\frac{-\bar{\alpha}}{2(\bar{\varrho}+k+1)}}$$

anzunehmen ist, ist

$$\int_{\mathfrak{r}_0}^{x} |e^{\vartheta(y)} y^{\varrho}\, dy| \leqq \gamma' |e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}|,$$

wo γ' von $\mathfrak{r}_0$ und x unabhängig ist. Ist eine beliebig kleine positive Größe ε gegeben, so wählen wir $\mathfrak{r}_0$ überdies so klein, daß $|\varphi(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2\gamma'}$ für $0 < x \leqq \mathfrak{r}_0$ ist. Dann ist für $0 < x \leqq \mathfrak{r}_0$

$$\int_{\mathfrak{r}_0}^{x} |e^{\vartheta(y)} y^{\varrho} \varphi(y)\, dy| \leqq \frac{\varepsilon}{2\gamma'} \int_{\mathfrak{r}_0}^{x} |e^{\vartheta(y)} y^{\varrho}\, dy| \leqq \frac{\varepsilon}{2} |e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}|.$$

Ferner ist

$$\int_{x_0}^{\mathfrak{r}_0} |e^{\vartheta(y)} y^{\varrho} \varphi(y)\, dy| = \gamma'' e^{-\bar{\vartheta}(x)} x^{-\bar{\varrho}-k-1} \cdot |e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}| \leqq \frac{\varepsilon}{2} |e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}|,$$

wenn man x hinreichend klein annimmt. Demnach ist für kleine positive x

$$\left| \int_{x_0}^{x} e^{\vartheta(y)} y^{\varrho} \varphi(y)\, dy \right| \leqq \int_{x_0}^{\mathfrak{r}_0} |e^{\vartheta(y)} y^{\varrho} \varphi(y)\, dy| + \int_{\mathfrak{r}_0}^{x} |e^{\vartheta(y)} y^{\varrho} \varphi(y)\, dy|$$
$$\leqq \varepsilon |e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}|, \text{ w. z. b. w. —}$$

Im Beweis des Hilfssatzes 4 (a. a. O., S. 138—140) sind die sieben letzten Zeilen von S. 139 durch das Folgende zu ersetzen:

Da

$$\lim_{y=+0} (\beta_n(y) + B_1 y + \cdots + B_k y^k + y^{k+1} B(y)) = 0$$

ist, so hat nach dem soeben bewiesenen Satze das zweite Glied von γ_n für $\lim x = +0$ den Grenzwert 0. —

Einige besondere Fälle der bisherigen Sätze mögen unter Benutzung der in § 1 und § 2 eingeführten Bezeichnung so ausgesprochen werden, wie sie in der vorliegenden Arbeit Anwendung finden.

Für $0 < x \leqq x_0 \leqq \sqrt[k]{\frac{\bar{a}_i}{2}}$ ist

$$\int_{x}^{x_0} \frac{e^{\frac{\bar{\sigma}_i}{k x^k}}}{x^{k+1}}\, x\, dx < \frac{2}{\bar{a}_i} e^{\frac{\bar{a}_i}{k x^k}}\, x. \qquad (i=1, \ldots \mu)$$

Um dieses Resultat, das aus dem früheren Hilfssatz 3 folgt, direkt zu erhalten, setzen wir

$$\int_x^{x_0} \frac{e^{\frac{\bar{a}_i}{kx^k}}}{x^{k+1}}\, x\, dx = \int_x^{x_0} \frac{e^{\frac{\bar{a}_i}{2kx^k}}}{x^{k+1}}\, z\, dx,$$

wo $z = e^{\frac{\bar{a}_i}{2kx^k}}\, x$ mit wachsendem x abnimmt, solange $x \leqq \sqrt[k]{\frac{\bar{a}_i}{2}}$ ist; daher haben wir für $0 < x \leqq x_0 \leqq \sqrt[k]{\frac{\bar{a}_i}{2}}$

$$\int_x^{x_0} \frac{e^{\frac{\bar{a}_i}{2kx^k}}}{x^{k+1}}\, z\, dx \leqq e^{\frac{\bar{a}_i}{2kx^k}}\, x \int_x^{x_0} \frac{e^{\frac{\bar{a}_i}{2kx^k}}}{x^{k+1}}\, dx < \frac{2}{\bar{a}_i}\, e^{\frac{\bar{a}_i}{kx^k}}\, x.$$

Ferner ist für alle positiven x

$$\int_0^x \frac{e^{\frac{\bar{a}_i}{kx^k}}}{x^{k+1}}\, x\, dx \leqq x \int_0^x \frac{e^{\frac{\bar{a}_i}{kx^k}}}{x^{k+1}}\, dx = -\frac{1}{\bar{a}_i}\, e^{\frac{\bar{a}_i}{kx^k}}\, x. \qquad (i=\mu+1, \ldots m)$$

Durch Zusammenfassung ergibt sich der

Hilfssatz I: „Für $0 < x \leqq x_0 \leqq \sqrt[k]{\frac{\bar{a}_\mu}{2}}$ ist

$$\int_{\xi_i}^x \left| \frac{e^{\frac{a_i}{kx^k}}}{x^{k+1}}\, x\, dx \right| \leqq \begin{cases} \dfrac{1}{2q}\, e^{\frac{\bar{a}_i}{kx^k}}\, x & (i=1, \ldots \mu) \\ \dfrac{1}{q}\, e^{\frac{\bar{a}_i}{kx^k}}\, x." & (i=\mu+1, \ldots m) \end{cases}$$

Weiter gilt der

Hilfssatz II: „Ist $\varphi_i(x)$ für $0 < x \leqq x_0$ stetig und $\lim\limits_{x=+0} \varphi_i(x) = 0$, so ist

$$\lim_{x=+0} e^{-\frac{a_i}{kx^k}}\, x^{-n} \int_{\xi_i}^x \frac{e^{\frac{a_i}{kx^k}}}{x^{k+1}}\, x^n \varphi_i(x)\, dx = 0." \qquad (i=1, \ldots m)$$

Im Falle $\bar{a}_i > 0$ $(\xi_i = x_0)$ ist der Satz auf S. 192 bewiesen. Im Falle $\bar{a}_i < 0$ $(\xi_i = 0)$ nehmen wir x nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Größe ε so klein, daß $|\varphi_i(x)| \leqq \varepsilon$ ist; dann ist

$$\left| e^{-\frac{a_i}{kx^k}}\, x^{-n} \int_0^x \frac{e^{\frac{a_i}{kx^k}}}{x^{k+1}}\, x^n \varphi_i(x)\, dx \right| \leqq e^{-\frac{\bar{a}_i}{kx^k}}\, x^{-n} \cdot x^n \varepsilon \int_0^x \frac{e^{\frac{\bar{a}_i}{kx^k}}}{x^{k+1}}\, dx = \frac{\varepsilon}{-\bar{a}_i}.$$

Aus den früheren Hilfssätzen 2 und 4 folgt, wenn man $\alpha = -a_i$, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = \alpha_{k+1} = \cdots = 0$, $\varrho = -k-1$ setzt, der

***Hilfssatz* III:** „Gilt für kleine positive x die asymptotische Gleichung

$$f_i(x) \sim B_{i0} + B_{i1}x + B_{i2}x^2 + \cdots,$$

so ist

$$\int_{\xi_i}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{kx^k}}}{x^{k+1}} f_i(x)\,dx \sim e^{\frac{a_i}{kx^k}}(C_{i0} + C_{i1}x + C_{i2}x^2 + \cdots);$$

dabei ist

$$a_iC_{i\nu} + B_{i\nu} = 0 \quad (\nu \leqq k),$$
$$a_iC_{i\nu} - (\nu - k)C_{i,\nu-k} + B_{i\nu} = 0 \quad (\nu \geqq k).“$$

§ 4.

Es sei y_i $(i = 1, \ldots m)$ ***irgend eine Lösung des Differentialsystems*** (A.) ***mit der Eigenschaft*** $\lim\limits_{x=+0} y_i = 0$.

Die Größen x_0 und h seien nach § 2 so gewählt, daß die Bedingungen (a.) erfüllt sind; wenn man x_0 unter Beibehaltung von h verkleinert, bleiben diese Bedingungen bestehen. Damit der Hilfssatz I (§ 3) anwendbar ist, machen wir überdies die Annahme $x_0 \leqq \sqrt[k]{\frac{\bar{a}_\mu}{2}}$. Ferner wählen wir x_0 so klein, daß $|y_i(x_0)| = |\eta_i| \leqq \frac{h}{2}$ $(i = 1, \ldots \mu)$ und daß $|y_i| \leqq h$ $(i = 1, \ldots m)$ für $0 \leqq x \leqq x_0$ ist. Wir setzen $h = x_0H$. Für $0 < x \leqq x_0 \leqq \sqrt[k]{\frac{\bar{a}_\mu}{2}}$ ist

$$e^{-\frac{\bar{a}_i}{kx^k}} x^{-1} \leqq e^{-\frac{\bar{a}_i}{kx_0^k}} x_0^{-1}, \qquad (i=1, \ldots \mu)$$

so daß, wenn

$$y_i(x_0) = \eta_i = c_i e^{-\frac{a_i}{kx_0^k}} \qquad (i=1, \ldots \mu)$$

gesetzt wird, für $0 < x \leqq x_0$

$$|c_i| e^{-\frac{\bar{a}_i}{kx^k}} x^{-1} \leqq \frac{H}{2} \qquad (i=1, \ldots \mu)$$

ist.

Wir weisen nach, ***daß für*** $0 < x \leqq x_0$

$$|y_i| \leqq Hx \qquad (i=1, \ldots m)$$

ist, **um mit Hilfe dieses Satzes das Verhalten von** y_i **für kleine reelle positive** x **genauer zu untersuchen.**

Die Lösung y_i genügt den Integralgleichungen (B.), in welchen x_0 und $c_1, \dots c_\mu$ wie angegeben bestimmt sind. Da die Gleichungen (B.) nur eine Lösung mit der Eigenschaft $|y_i| \leqq h$ $(i = 1, \dots m)$ für $0 \leqq x \leqq x_0$ besitzen, so liefert die Methode von § 1 und § 2 unsere Lösung y_i in Form einer für $0 \leqq x \leqq x_0$ gleichmäßig konvergenten Reihe.

Die Potenzreihe $F_i(x, y_1, \dots y_m)$ (§ 2) geht, wenn man $y_1 = xz_1, \dots y_m = xz_m$ setzt, in $x\Phi_i(x, z_1, \dots z_m)$ über, wo Φ_i eine Potenzreihe von $x, z_1, \dots z_m$ ist. Es ist $F_i(x_0, h, \dots h) \leqq hq$, also $\Phi_i(x_0, H, \dots H) \leqq Hq$ und daher $\Phi_i(x, |z_1|, \dots |z_m|) \leqq Hq$ für $0 \leqq x \leqq x_0$, $|z_1| \leqq H, \dots |z_m| \leqq H$. Für $0 \leqq x \leqq x_0$, $|y_1| \leqq Hx, \dots |y_m| \leqq Hx$ ist

$$|f_i(x, y_1, \dots y_m)| \leqq F_i(x, |y_1|, \dots |y_m|) = x\,\Phi_i(x, |z_1|, \dots |z_m|) \leqq Hqx.$$

Ebenso findet man, daß für $0 \leqq x \leqq x_0$, $|y_1| \leqq Hx, \dots |y_1'| \leqq Hx, \dots$ der absolute Betrag der in § 2 eingeführten Funktion $g_{ij}(x, y_1, \dots y_1', \dots)$ höchstens gleich Gx ist, wenn $\frac{g}{x_0} = G$ gesetzt wird, also

$$|f_i(x, y_1', \dots y_m') - f_i(x, y_1, \dots y_m)| \leqq Gx(|y_1' - y_1| + \dots + |y_m' - y_m|).$$

Für $0 < x \leqq x_0$ ist $|y_i^{(\nu)}| \leqq Hx$. Denn unter der Annahme $|y_i^{(\nu-1)}| \leqq Hx$ ist nach $(B^{(\nu)}.)$ und Hilfssatz I für $i = 1, \dots \mu$

$$\left|\frac{y_i^{(\nu)}}{x}\right| \leqq |c_i|\, e^{-\frac{\bar{a}_i}{kx^k}} x^{-1} + Hqe^{-\frac{\bar{a}_i}{kx^k}} x^{-1} \int_x^{x_0} \frac{e^{\frac{\bar{a}_i}{kx^k}}}{x^{k+1}}\, x\, dx$$

$$\leqq \frac{H}{2} + Hq \cdot \frac{1}{2q} = H$$

und für $i = \mu + 1, \dots m$

$$\left|\frac{y_i^{(\nu)}}{x}\right| \leqq Hqe^{-\frac{\bar{a}_i}{kx^k}} x^{-1} \int_0^x \frac{e^{\frac{\bar{a}_i}{kx^k}}}{x^{k+1}}\, x\, dx \leqq Hq \cdot \frac{1}{q} = H.$$

Nach § 2 ist für $0 < x \leqq x_0$

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{y_i^{(\nu)}}{x} = \frac{y_i}{x},$$

also auch

$$\frac{|y_i|}{x} \leqq H,$$

w. z. b. w.

§ 5.

Es sind (im allgemeinen divergente) Potenzreihen

$$S_i = C_{i1}x + C_{i2}x^2 + \dots \qquad (i=1, \dots m)$$

vorhanden, welche, für y_i eingesetzt, das Differentialsystem (A.) *formell befriedigen.* Durch formelle Rechnung erhält man nämlich

$$f_i(x, S_1, \dots S_m) = B_{i1}x + B_{i2}x^2 + \cdots,$$

wo B_{in} von $C_{j1}, \dots C_{j,n-1}$ $(j = 1, \dots m)$ abhängt; durch Einsetzen in (A.) und Vergleichen der Koeffizienten von $x^\nu (\nu = 1, 2, \dots)$ erhält man die zur sukzessiven Berechnung von $C_{i1}, C_{i2} \dots$ dienenden Gleichungen

$$a_i C_{i\nu} + B_{i\nu} - (\nu - k)\, C_{i,\nu-k} = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \dots)$$

worin $C_{i,\nu-k}$ im Falle $\nu \leqq k$ durch Null zu ersetzen ist.

Wir beweisen den Satz:

Jede Lösung y_i des Differentialsystems (A.), *für welche* $\lim_{x=+0} y_i = 0$ $(i = 1, \dots m)$ *ist, besitzt für kleine reelle positive x die asymptotische Darstellung*

$$y_i \sim S_i; \qquad (i = 1, \dots m)$$

d. h. wenn man, unter n eine der Zahlen $1, 2, \dots$ verstehend,

$$y_i = C_{i1}x + C_{i2}x^2 + \cdots + C_{in}x^n + \gamma_{in}x^n \qquad (i = 1, \dots m)$$

setzt, so ist

$$\lim_{x=+0} \gamma_{in} = 0.$$

Wir nehmen an, die Gleichung $\lim_{x=+0} \gamma_{i,n-1} = 0$ sei schon bewiesen, und zeigen, daß $\lim_{x=+0} \gamma_{in} = 0$ ist.

Wenn die Bezeichnung

$$S_{i,n-1} = C_{i1}x + \cdots + C_{i,n-1}x^{n-1}$$

benutzt wird, ist

$$f_i(x, S_{1,n-1}, \dots S_{m,n-1}) = B_{i1}x + \cdots + B_{in}x^n + B'_{i,n+1}x^{n+1} + \cdots,$$

da $B_{i1}, \dots B_{in}$ nur von den $C_{j1}, \dots C_{j,n-1}$ abhängen und daher ungeändert bleiben, wenn man in $f_i(x, S_1, \dots S_m)$ die $C_{jn}, C_{j,n+1}, \dots$ durch Null ersetzt. Nach Hilfssatz III (§ 3) ist

$$e^{-\frac{a_i}{kx^k}} \int_{\xi_i}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{kx^k}}}{x^{k+1}} f_i(x, S_{1,n-1}, \dots S_{m,n-1})\, dx \sim C'_{i1}x + C'_{i2}x^2 + \cdots;$$

es ist, wenn $B'_{i\nu} = B_{i\nu}$ $(\nu = 1, \dots n)$ gesetzt wird,

$$a_i C'_{i\nu} + B'_{i\nu} - (\nu - k) C'_{i,\nu-k} = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \dots)$$

worin $C'_{i,\nu-k}$ für $\nu \leqq k$ durch Null zu ersetzen ist. Vergleicht man damit

die zur Berechnung der $C_{i\nu}$ dienenden Gleichungen, so sieht man, daß $C'_{i\nu} = C_{i\nu}$ $(\nu = 1, 2, \dots n)$ ist. Man kann demnach schreiben:

$$c_i e^{-\frac{a_i}{kx^k}} + e^{-\frac{a_i}{kx^k}} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{kx^k}}}{x^{k+1}} f_i(x, S_{1,n-1}, \dots S_{m,n-1})\, dx = S_{in} + \varepsilon_{in} x^n, \quad (i=1, \dots \mu)$$

$$e^{-\frac{a_i}{kx^k}} \int_{0}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{kx^k}}}{x^{k+1}} f_i(x, S_{1,n-1}, \dots S_{m,n-1})\, dx = S_{in} + \varepsilon_{in} x^n; \quad (i=\mu+1, \dots m)$$

dabei ist

$$S_{in} = C_{i1} x + \cdots + C_{in} x^n,$$
$$\lim_{x=+0} \varepsilon_{in} = 0.$$

Die betrachtete Lösung y_i des Systems (A.) genügt den Integralgleichungen (B.), worin x_0 und $c_1, \dots c_\mu$ nach § 4 bestimmt sind. Die Gleichungen (B.) schreiben sich, wenn auf der linken Seite $y_i = S_{in} + \gamma_{in} x^n$ gesetzt wird,

$$c_i e^{-\frac{a_i}{kx^k}} + e^{-\frac{a_i}{kx^k}} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{kx^k}}}{x^{k+1}} f_i(x, y_1, \dots y_m)\, dx = S_{in} + \gamma_{in} x^n, \quad (i=1, \dots \mu)$$

$$e^{-\frac{a_i}{kx^k}} \int_{0}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{kx^k}}}{x^{k+1}} f_i(x, y_1, \dots y_m)\, dx = S_{in} + \gamma_{in} x^n. \quad (i=\mu+1, \dots m)$$

Wenn man hiervon die vorangehenden Gleichungen subtrahiert, erhält man

$$\gamma_{in} = \varepsilon_{in} + e^{-\frac{a_i}{kx^k}} x^{-n} \int_{\xi_i}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{kx^k}}}{x^{k+1}} x^n \varphi_i(x)\, dx; \quad (i=1, \dots m)$$

$$\varphi_i(x) = \frac{f_i(x, y_1, \dots y_m) - f_i(x, S_{1,n-1}, \dots S_{m,n-1})}{x^n}$$

ist eine für $0 < x \leqq x_0$ stetige Funktion von x; wenn gezeigt wird, daß $\lim_{x=+0} \varphi_i(x) = 0$ ist, so folgt aus Hilfssatz II, daß $\lim_{x=+0} \gamma_{in} = 0$ ist.

In § 4 wurde gezeigt, daß für $0 < x \leqq x_0$

$$|y_i| \leqq Hx \quad (i=1, \dots m)$$

ist. Ferner ist $a_i C_{i1} + B_{i1} = 0$, $B_{i1} = A^{(i)}_{1,0,\dots 0}$, also

$$C_{i1} = -\frac{A^{(i)}_{1,0,\dots 0}}{a_i};$$

nach § 2 ist

$$|A^{(i)}_{1,0,\dots 0}| x_0 \leqq \sum_{\lambda=1}^{\infty} |A^{(i)}_{\lambda,0,\dots 0}| x_0^\lambda = F_i(x_0, 0, \dots 0) \leqq \frac{hq}{2},$$

also, da $q \leqq |\bar{a}_i| \leqq |a_i|$ und $h = Hx_0$ ist,

$$|C_{i1}| \leqq \frac{H}{2}.$$

Es ist demnach eine (von n abhängige) positive Größe $\mathfrak{r}_0 \leqq x_0$ so vorhanden, daß für $0 \leqq x \leqq \mathfrak{r}_0$ der absolute Betrag von $C_{i1} + C_{i2}x + \cdots + C_{i,n-1}x^{n-2}$ höchstens gleich H, also

$$|S_{i,n-1}| \leqq Hx \qquad (i=1, \ldots m)$$

ist. Nach § 4 ist für $0 < x \leqq \mathfrak{r}_0$

$$|f_i(x, y_1, \ldots y_m) - f_i(x, S_{1,n-1}, \ldots S_{m,n-1})| \leqq Gx(|y_1 - S_{1,n-1}| + \cdots + |y_m - S_{m,n-1}|)$$
$$= Gx^n(|\gamma_{1,n-1}| + \cdots + |\gamma_{m,n-1}),$$

also

$$|\varphi_i(x)| \leqq G(|\gamma_{1,n-1}| + \cdots + |\gamma_{m,n-1}|).$$

Demnach ist $\lim\limits_{x=+0} \varphi_i(x) = 0$, w. z. b. w.

Die asymptotischen Gleichungen $y_i \backsim S_i$ $(i = 1, \ldots m)$ *können beliebig oft differenziert werden;* d. h. wenn die Reihe

$$S_i^{(p)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) \cdots (\nu+p) C_{i,\nu+p} x^\nu$$

durch p-malige gliedweise Differentiation der Reihe S_i entsteht, ist

$$\frac{d^p y_i}{dx^p} \backsim S_i^{(p)} \qquad (i=1, \ldots m)$$

für $p = 1, 2, 3, \ldots$. *Daraus ergeben sich die Grenzwerte der Ableitungen von* y_i *für* $\lim x = +0$:

$$\lim_{x=+0} \frac{d^p y_i}{dx^p} \backsim S_i^{(p)}. \qquad (p=1, 2, \ldots)$$

Aus (A.) erhält man durch $(p-1)$-malige Differentiation nach x

$$(\mathrm{A}^{(p)}.) \qquad x^{k+1} y_i^{(p)} = H_i^{(p)}(x, y_1, \ldots y_m, \ldots y_1^{(p-1)}, \ldots y_m^{(p-1)}),$$

wo $y_i^{(\lambda)} = \frac{d^\lambda y_i}{dx^\lambda}$ und $H_i^{(p)}$ eine Potenzreihe der beigefügten Argumente darstellt; es ist

$$H_i^{(1)} = a_i y_i' + \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y_1} y_1' + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial y_m} y_m' - (k+1) x^k y_i',$$

und es besteht die Rekursionsformel

$$H_i^{(p+1)} = \frac{\partial H_i^{(p)}}{\partial x} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_i^{(p)}}{\partial y_j} y_j' + \cdots + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_i^{(p)}}{\partial y_j^{(p-1)}} y_j^{(p)} - (k+1) x^k y_i^{(p)}.$$

Wenn die asymptotischen Gleichungen $y_i \backsim S_i$, $y_i' \backsim S_i'$, $\ldots$, $y_i^{(p-1)} \backsim S_i^{(p-1)}$ bestehen, so ist

$$y_i^{(p)} = \frac{H_i^{(p)}(x, y_1, \dots y_1^{(p-1)}, \dots)}{x^{k+1}} \backsim \frac{H_i^{(p)}(x, S_1, \dots S_1^{(p-1)}, \dots)}{x^{k+1}},$$

wo auf der rechten Seite formell nach den für konvergente Reihen gültigen Regeln gerechnet wird. Da die Gleichungen ($A^{(p)}$.) durch $y_i = S_i$ formell befriedigt werden*), so ist die rechte Seite gleich $S_i^{(p)}$; d. h. es ist $y_i^{(p)} \backsim S_i^{(p)}$.

Zweiter Abschnitt.

§ 6.

In dem System nicht linearer Differenzengleichungen

$$y_i(x+1) = G_i(x, y_1(x), \dots y_m(x)) \qquad (i=1, \dots m)$$

sei G_i eine Funktion von $x, y_1 = y_1(x), \dots y_m = y_m(x)$, welche für $x = \infty$, $y_1 = 0, \dots y_m = 0$ verschwindet und in der Umgebung dieser Stelle regulär ist:

$$G_i(x, y_1, \dots y_m) = \frac{a_{i0}}{x} + a_{i1} y_1 + \cdots + a_{im} y_m + \cdots . \qquad (i=1, \dots m)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Determinante

$$|a_{ij} - s\delta_{ij}| \qquad (i, j=1, \dots m)$$

die Elementarteiler $s - a_1, \dots s - a_m$ hat, *sei das System auf die Form*

$$(\mathfrak{A}.) \qquad y_i(x+1) = a_i y_i(x) + f_i\left(\frac{1}{x}, y_1(x), \dots y_m(x)\right) \qquad (i=1, \dots m)$$

oder

$$\Delta y_i = (a_i - 1) y_i + f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\right) \qquad (i=1, \dots m)$$

gebracht, worin

$$f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\right) = \sum A^{(i)}_{\lambda, \lambda_1, \dots \lambda_m} \left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda} y_1^{\lambda_1} \cdots y_m^{\lambda_m}$$

$$(\lambda=1, \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0;\ \lambda + \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \geqq 2)$$

und

$$|a_1| \leqq \cdots \leqq |a_\mu| < 1 < |a_{\mu+1}| \leqq \cdots \leqq |a_m|$$

ist.

Das System linearer Differenzengleichungen

$$y_i(x+1) = a_i y_i(x) + \varphi_i(x), \qquad (i=1, \dots m)$$

---

*) Wenn dies für ein bestimmtes p richtig ist, so ist für ein beliebig großes n

$$x^{k+1} S_{in}^{(p)} = H_i^{(p)}(x, S_{1n}, \dots S_{1n}^{(p-1)}, \dots) + x^{n-p+2} \mathfrak{P}_{in}(x),$$

wo $\mathfrak{P}_{in}(x)$ eine Potenzreihe von x bedeutet; durch Differentiation dieser Gleichung erhält man die entsprechende Gleichung für $p+1$.

wo $|\varphi_i(x)|$ für $x \geqq x_0$ unter einer endlichen Größe bleibt, hat die Lösung

$$y_i = c_i a_i^x + a_i^x \sum_{\xi_i}^{x} a_i^{-x-1} \varphi_i(x); \qquad (i=1, \dots m)$$

dabei ist

$$\xi_i = x_0 \ (i = 1, \dots \mu); \ \xi_i = \infty \ (i = \mu + 1, \dots m),$$

x durchläuft die Werte $x_0, x_0 + 1, x_0 + 2, \dots$, und es ist

$$\sum_{x_0}^{x} f(x) = f(x_0) + f(x_0 + 1) + \cdots + f(x - 1),$$

$$\sum_{\infty}^{x} f(x) = -\sum_{x}^{\infty} f(x) = -f(x) - f(x+1) - f(x+2) - \cdots;$$

$c_1, \dots c_m$ sind willkürliche Konstante.

Wir beschränken uns auf diejenigen Lösungen des Differenzengleichungssystems (𝔄.), für welche

$$|y_i| \leqq h \ (i = 1, \dots m) \text{ für } x \geqq x_0$$

ist; dabei ist x_0 eine hinreichend große und h eine hinreichend kleine positive Größe (§ 7). Aus (𝔄.) ergibt sich das System von Summengleichungen

$$y_i = c_i a_i^x + a_i^x \sum_{\xi_i}^{x} a_i^{-x-1} f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\right). \qquad (i=1, \dots m)$$

Wenn

$$\left| f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\right) \right| \leqq M \text{ für } x \geqq x_0, |y_1| \leqq h, \dots |y_m| \leqq h$$

ist, so ist für $i = \mu + 1, \dots m$

$$\left| a_i^x \sum_{\infty}^{x} a_i^{-x-1} f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\right) \right| \leqq M |a_i|^x \sum_{x}^{\infty} |a_i|^{-x-1} = \frac{M}{|a_i| - 1},$$

da

$$\sum_{x}^{\infty} |a_i|^{-x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_i|^{-x-n-1} = \frac{|a_i|^{-x}}{|a_i| - 1}$$

ist. Wegen

$$\lim_{x=\infty} |a_i|^x = \infty \ (i = \mu + 1, \dots m)$$

muß

$$c_i = 0 \ (i = \mu + 1, \dots m)$$

sein.

Eine Lösung des Systems (𝔄.) von der vorausgesetzten Beschaffenheit genügt also den Summengleichungen

$$(\mathfrak{B}.) \qquad \begin{cases} y_i = c_i a_i^x + a_i^x \sum_{x_0}^{x} a_i^{-x-1} f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\right), & (i=1, \dots \mu) \\ y_i = \quad a_i^x \sum_{\infty}^{x} a_i^{-x-1} f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\right), & (i=\mu+1, \dots m) \end{cases}$$

und umgekehrt. Für $x = x_0$ ist y_i $(i = 1, \dots \mu)$ gleich

$$\eta_i = c_i a_i^{x_0}. \qquad (i=1, \dots \mu)$$

Wir setzen $y_i^{(0)} = 0$ *und für* $\nu = 1, 2, 3, \dots$

$$(\mathfrak{B}^{(\nu)}.) \quad \begin{cases} y_i^{(\nu)} = c_i a_i^x + a_i^x \sum\limits_{x_0}^{x} a_i^{-x-1} f_i\Big(\frac{1}{x}, y_1^{(\nu-1)}, \dots y_m^{(\nu-1)}\Big), & (i=1, \dots \mu) \\ y_i^{(\nu)} = \qquad a_i^x \sum\limits_{\infty}^{x} a_i^{-x-1} f_i\Big(\frac{1}{x}, y_1^{(\nu-1)}, \dots y_m^{(\nu-1)}\Big); & (i=\mu+1, \dots m) \end{cases}$$

bei Anwendung der Bezeichnung

$$u_i^{(\nu)} = y_i^{(\nu)} - y_i^{(\nu-1)} \qquad (i=1, \dots m)$$

ist $u_i^{(1)} = y_i^{(1)}$ *und für* $\nu = 2, 3, \dots$

$$(\mathfrak{C}^{(\nu)}.) \quad u_i^{(\nu)} = a_i^x \sum_{\xi_i}^{x} a_i^{-x-1} \Big[f_i\Big(\frac{1}{x}, y_1^{(\nu-1)}, \dots y_m^{(\nu-1)}\Big) - f_i\Big(\frac{1}{x}, y_1^{(\nu-2)}, \dots y_1^{(\nu-2)}\Big)\Big]. \qquad (i=1, \dots m)$$

Die Reihen

$$y_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_i^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} y_i^{(\nu)} \qquad (i=1, \dots m)$$

sind, wie in § 7 nachgewiesen wird, für $x \geqq x_0$ absolut und gleichmäßig konvergent, wenn man x_0 hinreichend groß und $|\eta_1|, \dots |\eta_\mu|$ hinreichend klein annimmt; sie genügen dem System (𝔅.) und dem System (𝔄.)

§ 7.

Wir können positive Größen x_0 *und* h *so bestimmen, daß*

$$\Big| f_i\Big(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\Big) \Big| \leqq h\,q \text{ für } x \geqq x_0, |y_1| \leqq h, \dots |y_m| \leqq h,$$

$$\Big| f_i\Big(\frac{1}{x}, y_1', \dots y_m'\Big) - f_i\Big(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\Big) \Big| \leqq g\,(|y_1' - y_1| + \dots + |y_m' - y_m|)$$
$$\text{für } x \geqq x_0, |y_1| \leqq h, \dots |y_1'| \leqq h, \dots$$

ist; dabei sind q *und* g *positive Größen, welche den Bedingungen genügen:*

$$q \leqq \frac{1}{2} \sqrt{|a_i|}\,(1 - \sqrt{|a_i|}) \; (i = 1, \dots \mu); \; q \leqq \sqrt{|a_i|}\,(\sqrt{|a_i|} - 1) \; (i = \mu + 1, \dots m);$$

$$g < \frac{q}{m}.$$

Dafür sagen wir: x_0 *und* h *erfüllen die Bedingungen* (𝔞.)*),

Die Konstanten $c_1, \dots c_\mu$ werden so angenommen, daß

$$|\eta_i| = |c_i| \cdot |a_i|^{x_0} \leqq \frac{h}{2} \qquad (i=1, \dots \mu)$$

ist.

---

*) In § 7 kommt es nur auf diese Bedingungen an; die Funktionen f_i brauchen im übrigen die in § 6 vorausgesetzte Form nicht zu haben.

Es ist für $i = \mu + 1, \dots m$

$$\sum_{x}^{\infty} |a_i|^{-x-1} = \frac{|a_i|^{-x}}{|a_i| - 1} \leqq \frac{|a_i|^{-x}}{\sqrt{|a_i|}(\sqrt{|a_i|} - 1)} \leqq \frac{1}{q} |a_i|^{-x}$$

und für $i = 1, \dots \mu$

$$\sum_{x_0}^{x} |a_i|^{-x-1} = |a_i|^{-x_0-1} + \dots + |a_i|^{-x} < |a_i|^{-x}(1 + |a_i| + |a_i|^2 + \dots)$$

$$= \frac{|a_i|^{-x}}{1 - |a_i|} < \frac{|a_i|^{-x}}{\sqrt{|a_i|}(1 - \sqrt{|a_i|})} \leqq \frac{1}{2q} |a_i|^{-x}*).$$

Für $x \geqq x_0$ ist

$$|y_i^{(\nu)}| \leqq h, \quad |u_i^{(\nu)}| \leqq h\left(\frac{mg}{q}\right)^{\nu-1}.$$

Denn unter der Voraussetzung $|y_i^{(\nu-1)}| \leqq h$ ist nach $(\mathfrak{B}^{(\nu)}.)$ für $i = 1, \dots \mu$

$$|y_i^{(\nu)}| \leqq |c_i| \cdot |a_i|^{x_0} + hq |a_i|^x \sum_{x_0}^{x} |a_i|^{-x-1} \leqq \frac{h}{2} + hq \cdot \frac{1}{2q} = h$$

und für $i = \mu + 1, \dots m$

$$|y_i^{(\nu)}| \leqq hq |a_i|^x \sum_{x}^{\infty} |a_i|^{-x-1} = hq \cdot \frac{1}{q} = h;$$

unter der Voraussetzung

$$|u_i^{(\nu-1)}| \leqq h\left(\frac{mg}{q}\right)^{\nu-2}$$

ist nach $(\mathfrak{C}^{(\nu)}.)$ für $i = 1, \dots \mu$

$$|u_i^{(\nu)}| \leqq |a_i|^x \sum_{x_0}^{x} |a_i|^{-x-1} \cdot g(|u_1^{(\nu-1)}| + \dots + |u_m^{(\nu-1)}|)$$

$$\leqq mgh\left(\frac{mg}{q}\right)^{\nu-2} \cdot |a_i|^x \sum_{x_0}^{x} |a_i|^{-x-1} \leqq h\left(\frac{mg}{q}\right)^{\nu-1}$$

und für $i = \mu + 1, \dots m$

$$|u_i^{(\nu)}| \leqq |a_i|^x \sum_{x}^{\infty} |a_i|^{-x-1} \cdot g(|u_1^{(\nu-1)}| + \dots) \leqq h\left(\frac{mg}{q}\right)^{\nu-1}.$$

Demnach ist die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_i^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} y_i^{(\nu)} = y_i \qquad (i=1, \dots m)$$

für $x \geqq x_0$ absolut und gleichmäßig konvergent. Es ist $|y_i| \leqq h$ für $x \geqq x_0$. Aus den Gleichungen $(\mathfrak{B}^{(\nu)}.)$ folgt für $\lim \nu = \infty$, daß die Funktionen y_i den Summengleichungen $(\mathfrak{B}.)$ und damit auch den Differenzengleichungen $(\mathfrak{A}.)$ genügen.

---

*) Die obige Wahl von q ist mit Rücksicht auf Hilfssatz IV (§ 8) getroffen.

Aus der Annahme $\lim\limits_{x=\infty} y_i^{(\nu-1)} = 0$ folgt $\lim\limits_{x=\infty} f_i\left(\frac{1}{x}, y_1^{(\nu-1)}, \ldots\right) = 0$ und daraus nach Hilfssatz V (§ 8)

$$\lim_{x=\infty} a_i^x \sum_{\xi_i}^{x} a_i^{-x-1} f_i\left(\frac{1}{x}, y_1^{(\nu-1)}, \ldots y_m^{(\nu-1)}\right) = 0;$$

demnach ist nach ($\mathfrak{B}^{(\nu)}$.) $\lim\limits_{x=\infty} y_i^{(\nu)} = 0$; daraus folgt $\lim\limits_{x=\infty} y_i = 0$.

Hätten die Summengleichungen ($\mathfrak{B}$.) bei gegebenen Werten von $c_1, \ldots c_\mu$ außer der gefundenen Lösung y_i eine weitere Lösung y_i' mit der Eigenschaft $|y_i'| \leqq h$ für $x \geqq x_0$, so wäre

$$z_i = y_i' - y_i = a_i^x \sum_{\xi_i}^{x} a_i^{-x-1} \left[f_i\left(\frac{1}{x}, y_1', \ldots\right) - f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \ldots\right)\right]. \quad (i=1, \ldots m)$$

Da $|z_i| \leqq 2h$ und

$$\left| f_i\left(\frac{1}{x}, y_1', \ldots\right) - f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \ldots\right)\right| \leqq g(|z_1| + \cdots + |z_m|) \leqq 2mgh$$

wäre, so hätte man

$$|z_i| \leqq 2mgh \cdot |a_i|^x \left| \sum_{\xi_i}^{x} |a_i|^{-x-1} \right| \leqq 2h \cdot \frac{mg}{q}$$

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens

$$|z_i| \leqq 2h\left(\frac{mg}{q}\right)^n,$$

d. h. $z_i \equiv 0$.

Eine von y_i verschiedene Lösung y_i' der Differenzengleichungen ($\mathfrak{A}$.), welche die Bedingungen

$|y_i'| \leqq h$ für $x \geqq x_0$ $(i = 1, \ldots m)$; $y_i' = \eta_i = c_i a_i^{x_0}$ für $x = x_0$ $(i = 1, \ldots \mu)$

erfüllt, würde den Summengleichungen ($\mathfrak{B}$.) mit den früheren Werten von $c_1, \ldots c_\mu$ genügen, was sich als unmöglich ergeben hat.

Wir haben demnach den Satz:

Wenn x_0 und h die Bedingungen (a.) *erfüllen und wenn* $|\eta_i| \leqq \frac{h}{2}$ $(i = 1, \ldots \mu)$ *ist, stellen die für* $x \geqq x_0$ *absolut und gleichmäßig konvergenten Reihen*

$$y_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_i^{(\nu)} = \lim_{x=\infty} y_i^{(\nu)} \qquad (i=1, \ldots m)$$

eine Lösung des Systems von Differenzengleichungen ($\mathfrak{A}$.) *dar, welche den Bedingungen genügt:*

$$|y_i| \leqq h \text{ für } x \geqq x_0, \qquad (i=1,\dots m)$$
$$y_i = \eta_i \text{ für } x = x_0. \qquad (i=1,\dots \mu)$$

Eine weitere diesen Bedingungen entsprechende Lösung ist nicht vorhanden. Es ist

$$\lim_{x=\infty} y_i = 0. \qquad (i=1,\dots m)$$

§ 8.

Zu den Hilfssätzen 10 und 11 im 140. Bd., S. 164—166, fügen wir noch einige hier zu verwendende Sätze hinzu.

„Wenn $|\alpha| > 1$ ist, hat man für $x \geqq x_0 > 0$

$$\sum_{x_0}^{x} |\alpha^y y^\varrho| < \frac{|\alpha^x x^\varrho|}{\sqrt{|\alpha|}-1};$$

im Falle $\bar{\varrho} < 0$ wird

$$x_0 \geqq -\frac{2\bar{\varrho}}{\log|\alpha|}$$

angenommen."

Es ist nämlich

$$\sum_{x_0}^{x} |\alpha^y y^\varrho| = \sum_{x_0}^{x} |\alpha|^{\frac{1}{2}y} \cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}y} y^{\bar{\varrho}}.$$

Wenn $\bar{\varrho} \geqq 0$ ist oder wenn x_0 im Falle $\bar{\varrho} < 0$ die angegebene Bedingung erfüllt, ist der Differentialquotient der Funktion $|\alpha|^{\frac{1}{2}y} y^{\bar{\varrho}}$ für $y > x_0$ positiv; es ist also

$$|\alpha|^{\frac{1}{2}y} y^{\bar{\varrho}} < |\alpha|^{\frac{1}{2}x} x^{\bar{\varrho}},$$

$$\sum_{x_0}^{x} |\alpha^y y^\varrho| < |\alpha|^{\frac{1}{2}x} x^{\bar{\varrho}} \sum_{x_0}^{x} |\alpha|^{\frac{1}{2}y}.$$

Nun ist

$$\sum^{x} |\alpha|^{\frac{1}{2}y} = (\sqrt{|\alpha|})^{x_0} + \cdots + (\sqrt{|\alpha|})^{x-1} < (\sqrt{|\alpha|})^{x-1}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} + \left(\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}\right)^2 + \cdots\right)$$

$$= \frac{|\alpha|^{\frac{1}{2}x}}{\sqrt{|\alpha|}-1},$$

also

$$\sum_{x_0}^{x} |\alpha^y y^\varrho| < \frac{|\alpha|^x x^{\bar{\varrho}}}{\sqrt{|\alpha|}-1}. \quad -$$

„Wenn $|\alpha| > 1$ und $x_0 > 0$ ist, so ist für hinreichend große Werte von x

$$\sum_{x_0}^{x} |\alpha^y y^\varrho| < \gamma |\alpha^x x^\varrho|,$$

wo γ eine endliche Größe ist."

Wenn $\bar{\varrho} \geqq 0$ oder $\bar{\varrho} < 0$, $x_0 \geqq -\frac{2\bar{\varrho}}{\log|\alpha|}$ ist, so ist der Satz in dem vorangehenden enthalten. Im Falle $\bar{\varrho} < 0$, $x_0 < -\frac{2\bar{\varrho}}{\log|\alpha|}$ nehmen wir $x \geqq \mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_0 \geqq -\frac{2\bar{\varrho}}{\log|\alpha|}$ an; dann ist

$$\sum_{x_0}^{x} |\alpha^y y^\varrho| = \sum_{x_0}^{\mathfrak{x}_0} |\alpha^y y^\varrho| + \sum_{\mathfrak{x}_0}^{x} |\alpha^y y^\varrho| < \mathfrak{g} + \frac{|\alpha|^x x^{\bar{\varrho}}}{\sqrt{|\alpha|}-1}$$

$$= \left(\mathfrak{g}|\alpha|^{-x} x^{-\bar{\varrho}} + \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}-1}\right)|\alpha^x x^\varrho| < \gamma |\alpha^x x^\varrho|. \; —$$

„Wenn $|\alpha| > 1$, $x_0 > 0$ und $\lim_{x=\infty} \varphi(x) = 0$ ist, so ist

$$\lim_{x=\infty} \alpha^{-x} x^{-\varrho} \sum_{x_0}^{x} \alpha^y y^\varrho \varphi(y) = 0."$$

Für $x \geqq \mathfrak{x}_0$ ist

$$\sum_{\mathfrak{x}_0}^{x} |\alpha^y y^\varrho| < \frac{|\alpha^x x^\varrho|}{\sqrt{|\alpha|}-1};$$

dabei ist $\mathfrak{x}_0 > 0$ und, wenn $\bar{\varrho} < 0$ ist, $\mathfrak{x}_0 \geqq -\frac{2\bar{\varrho}}{\log|\alpha|}$ anzunehmen. Nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Größe ε wählen wir $\mathfrak{x}_0$ überdies so groß, daß für $x \geqq \mathfrak{x}_0$ $|\varphi(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}(\sqrt{|\alpha|}-1)$ ist. Dann ist

$$\sum_{\mathfrak{x}_0}^{x} |\alpha^y y^\varrho \varphi(y)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}(\sqrt{|\alpha|}-1) \sum_{\mathfrak{x}_0}^{x} |\alpha^y y^\varrho| < \frac{\varepsilon}{2}|\alpha^x x^\varrho|$$

für $x \geqq \mathfrak{x}_0$ und

$$\sum_{x_0}^{\mathfrak{x}_0} |\alpha^y y^\varrho \varphi(y)| = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}|\alpha|^{-x} x^{-\bar{\varrho}} \cdot |\alpha^x x^\varrho| < \frac{\varepsilon}{2}|\alpha^x x^\varrho|,$$

wenn x hinreichend groß gewählt wird. Für hinreichend große x ist also

$$\sum_{x_0}^{x} |\alpha^y y^\varrho \varphi(y)| < \varepsilon |\alpha^x x^\varrho|. \; —$$

Neben den Hilfssatz 11 (Bd. 140, S. 165) stellen wir den folgenden Satz:

„Ist $|\alpha| > 1$ und gilt für große x die asymptotische Gleichung

$$f(x) \sim \alpha^x x^\varrho \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots\right),$$

so besteht, wenn $x_0 > 0$ ist, die asymptotische Gleichung

$$\sum_{x_0}^{x} f(y) \backsim \alpha^x x^\varrho \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots\right);$$

dabei ist

$$b_0 = (\alpha - 1)c_0,$$
$$b_1 = (\alpha - 1)c_1 + \alpha(\varrho)_1 c_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_\nu = (\alpha - 1)c_\nu + \alpha(\varrho - \nu + 1)_1 c_{\nu-1} + \alpha(\varrho - \nu + 2)_2 c_{\nu-2} + \cdots + \alpha(\varrho - 1)_{\nu-1} c_1 + \alpha(\varrho)_\nu c_0.$$

Aus der Formel (a. a. O. S. 165)

$$\Delta \alpha^y y^{\varrho-\nu} = \alpha^y y^{\varrho-\nu}\left[\alpha - 1 + \frac{\alpha(\varrho-\nu)_1}{y} + \frac{\alpha(\varrho-\nu)_2}{y^2} + \cdots + \frac{\alpha(\varrho-\nu)_{n-\nu}}{y^{n-\nu}} + \frac{\tau_{\nu n}}{y^{n-\nu}}\right],$$
$$\lim_{y=\infty} \tau_{\nu n}(y) = 0$$

folgt, wenn

$$\mathfrak{S}_\nu = \sum_{x_0}^{x} \alpha^y y^{\varrho-\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

gesetzt wird,

$$\alpha^x x^{\varrho-\nu} - \alpha^{x_0} x_0^{\varrho-\nu} = (\alpha - 1)\mathfrak{S}_\nu + \alpha(\varrho-\nu)_1 \mathfrak{S}_{\nu+1} + \alpha(\varrho-\nu)_2 \mathfrak{S}_{\nu+2} + \cdots + \alpha(\varrho-\nu)_{n-\nu}\mathfrak{S}_n + \sum_{x_0}^{x} \tau_{\nu n}\alpha^y y^{\varrho-n}.$$

Wenn man die zu $\nu = 0, 1, \ldots n$ gehörigen Gleichungen mit $c_0, c_1, \ldots c_n$ multipliziert und addiert, erhält man

$$\alpha^x x^\varrho\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n}\right) - \alpha^{x_0} x_0^\varrho\left(c_0 + \frac{c_1}{x_0} + \cdots + \frac{c_n}{x_0^n}\right)$$
$$= b_0\mathfrak{S}_0 + b_1\mathfrak{S}_1 + \cdots + b_n\mathfrak{S}_n + \sum_{x_0}^{x} \tau_n \alpha^y y^{\varrho-n}, \quad \lim_{y=\infty} \tau_n(y) = 0.$$

Wenn man

$$f(y) = \alpha^y y^\varrho\left(b_0 + \frac{b_1}{y} + \cdots + \frac{b_n}{y^n} + \frac{\beta_n}{y^n}\right), \quad \lim_{y=\infty} \beta_n(y) = 0$$

setzt, ist

$$\sum_{x_0}^{x} f(y) = b_0\mathfrak{S}_0 + b_1\mathfrak{S}_1 + \cdots + b_n\mathfrak{S}_n + \sum_{x_0}^{x} \beta_n \alpha^y y^{\varrho-n}$$
$$= \alpha^x x^\varrho\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\gamma_n}{x^n}\right),$$
$$\gamma_n = \alpha^{-x} x^{-\varrho+n} \sum_{x_0}^{x} (\beta_n - \tau_n)\alpha^y y^{\varrho-n} - \alpha^{x_0-x} x^{-\varrho+n} x_0^\varrho\left(c_0 + \frac{c_1}{x_0} + \cdots + \frac{c_n}{x_0^n}\right).$$

Wegen $\lim_{y=\infty} (\beta_n - \tau_n) = 0$ ist nach dem vorausgehenden Satze $\lim_{x=\infty} \gamma_n = 0$.

Wir sprechen einige Spezialfälle der bisherigen Sätze in der in § 6 und § 7 eingeführten Bezeichnung aus.

Hilfssatz IV. „Für $x \geqq x_0 \geqq \frac{2}{-\log|a_\mu|} \geqq \frac{2}{-\log|a_i|}$ ist

$$\sum_{x_0}^{x} |a_i|^{-y-1} y^{-1} < \frac{|a_i|^{-x} x^{-1}}{\sqrt{|a_i|}(1-\sqrt{|a_i|})} \leqq \frac{1}{2q} |a_i|^{-x} x^{-1} \qquad (i=1, \dots \mu)$$

und für $x > 0$

$$\sum_{x}^{\infty} |a_i|^{-y-1} y^{-1} \leqq \frac{|a_i|^{-x} x^{-1}}{\sqrt{|a_i|}(\sqrt{|a_i|}-1)} \leqq \frac{1}{q} |a_i|^{-x} x^{-1}.\text{“} \qquad (i=\mu+1, \dots m)$$

Hilfssatz V. „Wenn $\lim_{x=\infty} \varphi_i(x) = 0$ ist, so ist

$$\lim_{x=\infty} a_i^x x^n \sum_{\xi_i}^{x} a_i^{-x-1} x^{-n} \varphi_i(x) = 0.\text{“} \qquad (i=1, \dots m)$$

Hilfssatz VI. „Gilt für große positive x die asymptotische Gleichung

$$f_i(x) \backsim B_{i0} + \frac{B_{i1}}{x} + \frac{B_{i2}}{x^2} + \cdots,$$

so ist

$$\sum_{\xi_i}^{x} a_i^{-x-1} f_i(x) \backsim a_i^{-x}\left(C_{i0} + \frac{C_{i1}}{x} + \frac{C_{i2}}{x^2} + \cdots\right);$$

dabei ist

$$(1-a_i) C_{i\nu} = (\nu-1)_1 C_{i,\nu-1} - (\nu-1)_2 C_{i,\nu-2} + \cdots - (-1)^{\nu-1} (\nu-1)_{\nu-1} C_{i1} + B_{i\nu}.\text{“} \qquad (\nu=0, 1, 2, \dots)$$

§ 9.

Wir bezeichnen jetzt mit y_i $(i=1, \dots m)$ irgend eine Lösung des Systems (𝔄.) *von Differenzengleichungen mit der Eigenschaft* $\lim_{x=\infty} y_i = 0$.

Abgesehen davon, daß x_0 und h die Bedingungen (a.) erfüllen sollen, nehmen wir $x_0 \geqq \frac{2}{-\log|a_\mu|}$, so daß der Hilfssatz IV gilt; ferner sei x_0 so groß gewählt, daß $|y_i(x_0)| = |\eta_i| \leqq \frac{h}{2}$ $(i=1, \dots \mu)$ und daß $|y_i| \leqq h$ $(i=1, \dots m)$ für $x \geqq x_0$ ist. Wenn $c_1, \dots c_\mu$ aus den Gleichungen

$$y_i(x_0) = \eta_i = c_i a_i^{x_0} \qquad (i=1, \dots \mu)$$

bestimmt werden, ist für $x \geqq x_0$

$$|c_i| \cdot |a_i|^x x \leqq |c_i| \cdot |a_i|^{x_0} x_0 = |\eta_i| x_0 \leqq \frac{H}{2}, \qquad (i=1, \dots \mu)$$

wo $H = h x_0$ gesetzt ist.

Wir zeigen, *daß für* $x \geqq x_0$

$$|y_i| \leqq \frac{H}{x} \qquad (i=1, \dots m)$$

ist.

Unsere Lösung y_i genügt den Summengleichungen ($\mathfrak{B}$.) mit den angegebenen Werten von x_0 und $c_1, \dots c_\mu$; sie wird durch die in § 6 und § 7 dargestellte Methode geliefert, da die Summengleichungen ($\mathfrak{B}$.) nur eine Lösung besitzen, für welche $|y_i| \leqq h$ für $x \geqq x_0$ ist.

Für $x \geqq x_0$, $|y_1| \leqq \frac{H}{x}, \dots |y_m| \leqq \frac{H}{x}$ ist (vgl. § 4)

$$\left| f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\right) \right| \leqq \frac{Hq}{x},$$

ferner ist, wenn $G = g x_0$ gesetzt wird, für $x \geqq x_0$, $|y_1| \leqq \frac{H}{x}, \dots |y_1'| \leqq \frac{H}{x}, \dots$

$$\left| f_i\left(\frac{1}{x}, y_1', \dots y_m'\right) - f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\right) \right| \leqq \frac{G}{x} \left(|y_1' - y_1| + \dots + |y_m' - y_m|\right).$$

Es ist $|y_i^{(\nu)}| \leqq \frac{H}{x}$ für $x \geqq x_0$. Denn wenn wir $|y_i^{(\nu-1)}| \leqq \frac{H}{x}$ voraussetzen, ist zufolge ($\mathfrak{B}^{(\nu)}$.) und Hilfssatz IV

$$|x y_i^{(\nu)}| \leqq |c_i| \cdot |a_i|^x x + Hq |a_i|^x x \sum_{x_0}^{x} |a_i|^{-x-1} x^{-1}$$

$$\leqq \frac{H}{2} + Hq \cdot \frac{1}{2q} = H, \qquad (i=1, \dots \mu)$$

$$|x y_i^{(\nu)}| \leqq Hq |a_i|^x x \sum_{x}^{\infty} |a_i|^{-x-1} x^{-1} \leqq Hq \cdot \frac{1}{q} = H. \qquad (i=\mu+1, \dots m)$$

Da nach § 7 für $x \geqq x_0$

$$\lim_{\nu=\infty} x y_i^{(\nu)} = x y_i$$

ist, so ist

$$x |y_i| \leqq H.$$

Die Differenzengleichungen ($\mathfrak{A}$.) *werden formell befriedigt, wenn man für* y_i $(i = 1, \dots m)$ *eine (divergente) Reihe*

$$S_i = \frac{C_{i1}}{x} + \frac{C_{i2}}{x^2} + \dots$$

setzt. Hiernach ist formell

$$f_i\left(\frac{1}{x}, S_1, \dots S_m\right) = \frac{B_{i1}}{x} + \frac{B_{i2}}{x^2} + \dots,$$

wo B_{in} von $C_{j1}, \dots C_{j,n-1}$ $(j = 1, \dots m)$ abhängt. Ferner ist

$$\Delta \frac{1}{x^n} = \frac{1}{(x+1)^n} - \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^n}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-n} - 1\right]$$
$$= -\frac{(n)_1}{x^{n+1}} + \frac{(n+1)_2}{x^{n+2}} - \frac{(n+2)_3}{x^{n+3}} + \cdots,$$

also

$$\Delta y_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{-(\nu-1)_1 C_{i,\nu-1} + (\nu-1)_2 C_{i,\nu-2} - \cdots + (-1)^{\nu-1}(\nu-1)_{\nu-1} C_{i1}}{x^\nu}.$$

Durch Einsetzung in (𝔄.) und Vergleichung der Koeffizienten von x^ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ erhält man die Gleichungen

$$(1-a_i) C_{i\nu} = (\nu-1)_1 C_{i,\nu-1} - (\nu-1)_2 C_{i,\nu-2} + \cdots - (-1)^{\nu-1}(\nu-1)_{\nu-1} C_{i1} + B_{i\nu},$$

durch welche $C_{i1}, C_{i2}, \ldots$ bestimmt sind.

Jede Lösung y_i $(i = 1, \ldots m)$ *des Systems* (𝔄.) *mit der Eigenschaft* $\lim_{x=\infty} y_i = 0$ *hat für große reelle positive* x *die asymptotische Darstellung*

$$y_i \sim S_i; \qquad (i=1, \ldots m)$$

d. h. wenn man für $n = 1, 2, \ldots$

$$y_i = \frac{C_{i1}}{x} + \cdots + \frac{C_{in}}{x^n} + \frac{\gamma_{in}}{x^n} \qquad (i=1, \ldots m)$$

setzt, ist

$$\lim_{x=\infty} \gamma_{in} = 0.$$

Wir nehmen an, es sei $\lim_{x=\infty} \gamma_{i,n-1} = 0$. Bei Benutzung der Bezeichnung

$$S_{in} = \frac{C_{i1}}{x} + \cdots + \frac{C_{in}}{x^n}$$

ist

$$\overline{f}_i\left(\frac{1}{x}, S_{1,n-1}, \ldots S_{m,n-1}\right) = \frac{B_{i1}}{x} + \cdots + \frac{B_{in}}{x^n} + \frac{B'_{i,n+1}}{x^{n+1}} + \cdots.$$

Nach Hilfssatz VI ist

$$a_i^x \sum_{\xi_i}^{x} a_i^{-x-1} f_i\left(\frac{1}{x}, S_{1,n-1}, \ldots S_{m,n-1}\right) \sim \frac{C_{i1}}{x} + \cdots + \frac{C_{in}}{x^n} + \frac{C'_{i,n+1}}{x^{n+1}} + \cdots.$$

Man hat demnach

$$c_i a_i^x + a_i^x \sum_{x_0}^{x} a_i^{-x-1} f_i\left(\frac{1}{x}, S_{1,n-1}, \ldots S_{m,n-1}\right) = S_{in} + \frac{\varepsilon_{in}}{x^n}, \qquad (i=1, \ldots \mu)$$

$$a_i^x \sum_{\infty}^{x} a_i^{-x-1} f_i\left(\frac{1}{x}, S_{1,n-1}, \ldots S_{m,n-1}\right) = S_{in} + \frac{\varepsilon_{in}}{x^n}, \qquad (i=\mu+1, \ldots m)$$

wo $\lim_{x=\infty} \varepsilon_{in} = 0$ ist.

Da unsere Lösung y_i den Summengleichungen (𝔅.) mit den oben bestimmten Werten von x_0 und $c_1, \ldots c_\mu$ genügt, so ist

$$c_i a_i^x + a_i^x \sum_{x_0}^{x} a_i^{-x-1} f_i\Big(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\Big) = S_{in} + \frac{\gamma_{in}}{x^n}, \qquad (i=1, \dots \mu)$$

$$a_i^x \sum_{\infty}^{x} a_i^{-x-1} f_i\Big(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\Big) = S_{in} + \frac{\gamma_{in}}{x^n}. \qquad (i=\mu+1, \dots m)$$

Hieraus erhält man durch Subtraktion der vorangehenden Gleichungen

$$\gamma_{in} = \varepsilon_{in} + a_i^x x^n \sum_{\xi_i}^{x} a_i^{-x-1} x^{-n} \varphi_i(x), \qquad (i=1, \dots m)$$

$$\varphi_i(x) = x^n \Big[f_i\Big(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\Big) - f_i\Big(\frac{1}{x}, S_{1,n-1}, \dots S_{m,n-1}\Big)\Big].$$

Es ist

$$C_{i1} = \frac{B_{i1}}{1-a_i} = \frac{A^{(i)}_{1,0,\dots 0}}{1-a_i},$$

$$\frac{|A^{(i)}_{1,0,\dots 0}|}{x_0} \leqq \frac{hq}{2}, \quad |A^{(i)}_{1,0,\dots 0}| \leqq \frac{Hq}{2},$$

also

$$|C_{i1}| \leqq \frac{Hq}{2|1-a_i|} < \frac{H}{2}.$$

Wenn $r_0 \geqq x_0$ hinreichend groß (von n abhängig) genommen wird, ist demnach für $x \geqq r_0$

$$|S_{i,n-1}| \leqq \frac{H}{x}.$$

Für $x \geqq x_0$ ist, wie oben gezeigt wurde,

$$|y_i| \leqq \frac{H}{x}.$$

Für $x \geqq r_0$ ist also

$$\Big| f_i\Big(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\Big) - f_i\Big(\frac{1}{x}, S_{1,n-1}, \dots S_{m,n-1}\Big)\Big| \leqq \frac{G}{x^n}\,(|\gamma_{1,n-1}| + \dots + |\gamma_{m,n-1}|),$$

$$|\varphi_i(x)| \leqq G\,(|\gamma_{1,n-1}| + \dots + |\gamma_{m,n-1}|), \quad \lim_{x=\infty} \varphi_i(x) = 0.$$

Nach Hilfssatz V ist nunmehr $\lim_{x=\infty} \gamma_{in} = 0$.

Dritter Abschnitt.

§ 10.

Es liege das System von Differenzengleichungen

$$x^{-k} y_i(x+1) = G_i(x, y_1(x), \dots y_m(x)) \qquad (i=1, \dots m)$$

vor, wo k eine der Zahlen $1, 2, 3, \dots$ ist und G_i dieselbe Bedeutung hat wie im zweiten Abschnitt. *Das System sei auf die Form gebracht:*

$$(\bar{\mathfrak{A}}.) \qquad x^{-k} y_i(x+1) = a_i y_i(x) + f_i\Big(\frac{1}{x}, y_1(x), \dots y_m(x)\Big), \qquad (i=1, \dots m)$$

$$f_i\Big(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\Big) = \sum A^{(i)}_{\lambda, \lambda_1, \dots \lambda_m} \Big(\frac{1}{x}\Big)^{\lambda} y_1^{\lambda_1} \cdots y_m^{\lambda_m};$$

$$(\lambda=1, \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0;\ \lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_m \geqq 2)$$

$a_1, \dots a_m$ sollen von Null verschieden sein.

Das System linearer Differenzengleichungen

$$x^{-k} y_i(x+1) = a_i y_i(x) + \varphi_i(x), \qquad (i=1, \dots m)$$

wo $\varphi_i(x)$ für $x \geqq x_0 > 0$ endlich ist, hat die Lösung

$$y_i = c_i (\Gamma(x))^k a_i^x - (\Gamma(x))^k a_i^x \sum_x^\infty \frac{\varphi_i(x)}{(\Gamma(x))^k a_i^{x+1}}$$

$$= c_i (\Gamma(x))^k a_i^x - (\Gamma(x))^k a_i^x \sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi_i(x+n)}{(\Gamma(x+n))^k a_i^{x+n+1}}$$

$$= c_i (\Gamma(x))^k a_i^x - \sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi_i(x+n)}{(x(x+1)\cdots(x+n-1))^k a_i^{n+1}}. \qquad (i=1, \dots m)$$

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(x(x+1)\cdots(x+n-1))^k a_i^{n+1}}$$

ist für alle Werte von x mit Ausnahme von $0, -1, -2, \dots$ konvergent, da der Quotient zweier aufeinanderfolgenden Glieder für $n = \infty$ den Grenzwert Null hat; die Konvergenz ist gleichmäßig für $x \geqq x_0 > 0$. Der Ausdruck

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi_i(x+n)}{(x(x+1)\cdots(x+n-1))^k a_i^{n+1}}$$

bleibt für beliebig große x endlich; y_i kann nur im Falle $c_i = 0$ endlich bleiben, weil $\lim\limits_{x=\infty} (\Gamma(x))^k a_i^x = \infty$ ist. Es ist also nur eine für große x endliche Lösung vorhanden:

$$y_i = -(\Gamma(x))^k a_i^x \sum_x^\infty \frac{\varphi_i(x)}{(\Gamma(x))^k a_i^{x+1}}. \qquad (i=1, \dots m)$$

Eine Lösung y_i $(i = 1, \dots m)$ des Systems $(\bar{\mathfrak{A}}.)$ genügt, wenn $|y_i|$ für $x \geqq x_0$ unter einer endlichen Schranke bleibt, dem System von Summengleichungen

$$(\bar{\mathfrak{B}}.) \qquad y_i = -(\Gamma(x))^k a_i^x \sum_x^\infty \frac{f_i\Big(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\Big)}{(\Gamma(x))^k a_i^{x+1}}; \qquad (i=1, \dots m)$$

aus dem System $(\bar{\mathfrak{B}}.)$ folgt wieder das System $(\bar{\mathfrak{A}}.)$.

Wir setzen $y_i^{(0)} = 0$ und für $\nu = 1, 2, \dots$

$$(\bar{\mathfrak{B}}^{(\nu)}.) \qquad y_i^{(\nu)} = -(\Gamma'(x))^k a_i^x \sum_x^\infty \frac{f_i\left(\frac{1}{x}, y_1^{(\nu-1)}, \dots y_m^{(\nu-1)}\right)}{(\Gamma(x))^k a_i^{x+1}}; \qquad (i=1,\dots m)$$

unter Benutzung der Bezeichnung

$$u_i^{(\nu)} = y_i^{(\nu)} - y_i^{(\nu-1)} \qquad (i=1,\dots m)$$

ist $u_i^{(1)} = y_i^{(1)}$ *und für* $\nu = 2, 3, \dots$

$$(\bar{\mathfrak{C}}^{(\nu)}.) \quad u_i^{(\nu)} = -(\Gamma'(x))^k a_i^x \sum_x^\infty \frac{f_i\left(\frac{1}{x}, y_1^{(\nu-1)}, \dots\right) - f_i\left(\frac{1}{x}, y_1^{(\nu-2)}, \dots\right)}{(\Gamma(x))^k a_i^{x+1}}. \qquad (i=1,\dots m)$$

Die positiven Größen x_0 *und* h *sollen die Bedingungen* (ā.) *erfüllen, welche aus den Bedingungen* (a.) *am Anfang von* § 7 *dadurch hervorgehen, daß man die dortigen Ungleichungen für* q *durch die folgenden ersetzt:*

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(x_0(x_0+1)\cdots(x_0+n-1))^k |a_i|^{n+1}} \leqq \frac{1}{q}.^*) \qquad (i=1,\dots m)$$

Dann ist für $x \geqq x_0$

$$|y_i^{(\nu)}| \leqq h, \quad |u_i^{(\nu)}| \leqq h\left(\frac{mg}{q}\right)^{\nu-1},$$

wie sich aus den Gleichungen $(\bar{\mathfrak{B}}^{(\nu)}.)$ und $(\bar{\mathfrak{C}}^{(\nu)}.)$ durch den Schluß von $\nu-1$ auf ν ergibt. Durch ähnliche Schlüsse wie in § 7 gelangt man zu dem folgenden Satze:

Wenn x_0 *und* h *die Bedingungen* (ā.) *erfüllen, stellen die für* $x \geqq x_0$ *absolut und gleichmäßig konvergenten Reihen*

$$y_i = \sum_{\nu=1}^\infty u_i^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} y_i^{(\nu)} \qquad (i=1,\dots m)$$

die einzige Lösung des Systems von Differenzengleichungen $(\bar{\mathfrak{A}}.)$ *dar, für welche* $|y_i| \leqq h$ $(i = 1, \dots m)$ *für* $x \geqq x_0$ *ist. Für diese Lösung ist* $\lim_{x=\infty} y_i = 0$ $(i = 1, \dots m)$.

Wenn $hx_0 = H$ gesetzt wird, ist für $x \geqq x_0$

$$|y_i^{(\nu)}| \leqq \frac{H}{x}; \qquad (i=1,\dots m)$$

man folgert dies aus $(\bar{\mathfrak{B}}^{(\nu)}.)$ durch den Schluß von $\nu-1$ auf ν, ohne daß es hier nötig ist, x_0 weiteren Bedingungen zu unterwerfen. Hiernach ist für $x \geqq x_0$

---

*) Da die Reihe auf der linken Seite das Anfangsglied $\frac{1}{|a_i|}$ hat, so ist $q < |a_i|$.

$$|y_i| \leqq \frac{H}{x}. \qquad (i=1,\dots m)$$

§ 11.

Wir machen von folgendem Hilfssatz Gebrauch.

„Gilt für große x die asymptotische Gleichung

$$f(x) \backsim \frac{1}{(\Gamma(x))^k a^{x+1}}\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots\right),$$

so ist

$$-\sum_x^\infty f(y) \backsim \frac{1}{(\Gamma(x))^k a^x}\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots\right);$$

dabei sind $c_0, c_1, c_2, \dots$ durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned}
&a c_0 + b_0 = 0,\\
&a c_1 + b_1 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&a c_{k-1} + b_{k-1} = 0,\\
&a c_k - c_0 + b_k = 0,\\
&a c_\nu - c_{\nu-k} + (\nu-k-1)_1 c_{\nu-k-1} - (\nu-k-1)_2 c_{\nu-k-2} + \cdots\\
&\qquad - (-1)^{\nu-k-1}(\nu-k-1)_{\nu-k-1} c_1 + b_\nu = 0 \quad (\nu \geqq k+1).\text{“}
\end{aligned}$$

Es ist

$$\Delta \frac{1}{(\Gamma(y))^k a^y y^\nu} = \frac{1}{(\Gamma(y))^k a^{y+1} y^\nu}\left[\frac{1}{y^k\left(1+\frac{1}{y}\right)^\nu} - a\right]$$

$$= \frac{1}{(\Gamma(y))^k a^{y+1} y^\nu}\left[-a + \frac{1}{y^k} + \frac{(-\nu)_1}{y^{k+1}} + \frac{(-\nu)_2}{y^{k+2}} + \cdots + \frac{(-\nu)_{n-k-\nu}}{y^{n-\nu}} + \frac{\tau_{n\nu}}{y^{n-\nu}}\right],$$

wo $\lim\limits_{y=\infty} \tau_{n\nu} = 0$ ist, also, wenn

$$\mathfrak{S}_\nu = -\sum_x^\infty \frac{1}{(\Gamma(y))^k a^{y+1} y^\nu}$$

gesetzt wird,

$$\frac{1}{(\Gamma(x))^k a^x x^\nu} = -a\mathfrak{S}_\nu + \mathfrak{S}_{\nu+k} - (\nu)_1 \mathfrak{S}_{\nu+k+1} + (\nu+1)_2 \mathfrak{S}_{\nu+k+2} + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-k-\nu}(n-k-1)_{n-k-\nu}\mathfrak{S}_n - \sum_x^\infty \frac{\tau_{\nu n}(y)}{(\Gamma(y))^k a^{y+1} y^n}.$$

Wenn man die zu $\nu = 0, 1, \dots n$ gehörigen Gleichungen mit $c_0, c_1, \dots c_n$ multipliziert und addiert, erhält man

$$b_0\mathfrak{S}_0 + b_1\mathfrak{S}_1 + \cdots + b_n\mathfrak{S}_n$$

$$= \frac{1}{(\Gamma(x))^k a^x}\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n}\right) - \sum_x^\infty \frac{\tau_n(y)}{(\Gamma(y))^k a^{y+1} y^n},$$

wo $\lim\limits_{y=\infty} \tau_n(y) = 0$ ist. Es ist

$$f(y) = \frac{1}{(\Gamma(y))^k a^{y+1}}\Big(b_0 + \frac{b_1}{y} + \cdots + \frac{b_n}{y^n} + \frac{\beta_n}{y^n}\Big), \quad \lim_{y=\infty} \beta_n(y) = 0;$$

$$-\sum_x^\infty f(y) = b_0 \mathfrak{S}_0 + b_1 \mathfrak{S}_1 + \cdots + b_n \mathfrak{S}_n - \sum_x^\infty \frac{\beta_n(y)}{(\Gamma(y))^k a^{y+1} y^n}$$

$$= \frac{1}{(\Gamma(x))^k a^x}\Big(c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\gamma_n}{x^n}\Big),$$

$$\gamma_n = -(\Gamma(x))^k a^x x^n \sum_x^\infty \frac{\beta_n(y) + \tau_n(y)}{(\Gamma(y))^k a^{y+1} y^n}$$

$$= -\sum_{\lambda=0}^\infty \frac{\beta_n(x+\lambda) + \tau_n(x+\lambda)}{(x(x+1)\cdots(x+\lambda-1))^k a^{\lambda+1}\Big(1 + \frac{\lambda}{x}\Big)^n},$$

also $\lim_{x=\infty} \gamma_n = 0$.

§ 12.

Das System ($\overline{\mathfrak{A}}$.) *wird formell befriedigt, wenn man für* y_i *die Reihe*

$$S_i = \frac{C_{i1}}{x} + \frac{C_{i2}}{x^2} + \cdots \qquad (i=1, \ldots m)$$

setzt, deren Koeffizienten aus den Gleichungen

$$a_i C_{i\nu} - C_{i,\nu-k} + (\nu-k-1)_1 C_{i,\nu-k-1} - (\nu-k-1)_2 C_{i,\nu-k-2} + \cdots$$
$$-(-1)^{\nu-k-1}(\nu-k-1)_{\nu-k-1} C_{i1} + B_{i\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

berechnet werden, in welchen, solange $\nu \leqq k$ ist, $C_{i,\nu-k}, C_{i,\nu-k-1}, \ldots$ durch Null zu ersetzen sind, so daß man hat

$$a_i C_{i\nu} + B_{i\nu} = 0; \qquad (\nu=1, \ldots k)$$

dabei ist $B_{i\nu}$ Koeffizient der formellen Entwicklung

$$f_i\Big(\frac{1}{x}, S_1, \ldots S_m\Big) = \frac{B_{i1}}{x} + \frac{B_{i2}}{x^2} + \cdots.$$

Die oben bestimmte Lösung $y_1, \ldots y_m$ *des Systems* ($\overline{\mathfrak{A}}$.) *hat für große reelle positive* x *die asymptotische Darstellung*

$$y_i \backsim S_i. \qquad (i=1, \ldots m)$$

Wir benutzen wieder die Bezeichnung

$$S_{i\nu} = \frac{C_{i1}}{x} + \cdots + \frac{C_{i\nu}}{x^\nu},$$

$$y_i - S_{i\nu} = \frac{\gamma_{i\nu}}{x^\nu}$$

und nehmen an, es sei $\lim_{x=\infty} \gamma_{i,n-1} = 0$. Es ist

$$f_i(S_{1,n-1}, \ldots S_{m,n-1}) = \frac{B_{i1}}{x} + \cdots + \frac{B_{in}}{x^n} + \frac{B'_{i,n+1}}{x^{n+1}} + \cdots$$

und nach § 11

$$-(\Gamma(x))^k a_i^x \sum_x^\infty \frac{f_i\left(\frac{1}{x}, S_{1,n-1}, \dots S_{m,n-1}\right)}{(\Gamma(x))^k a_i^{x+1}} \backsim \frac{C_{i1}}{x} + \dots + \frac{C_{in}}{x^n} + \frac{C_{i,n+1}}{x^{n+1}} + \dots,$$

also

$$-(\Gamma(x))^k a_i^x \sum_x^\infty \frac{f_i\left(\frac{1}{x}, S_{1,n-1}, \dots S_{m,n-1}\right)}{(\Gamma(x))^k a_i^{x+1}} = S_{in} + \frac{\varepsilon_{in}}{x^n},$$

wo $\lim\limits_{x=\infty} \varepsilon_{in} = 0$ ist. Den Gleichungen ($\overline{\mathfrak{B}}$.) geben wir die Form

$$-(\Gamma(x))^k a_i^x \sum_x^\infty \frac{f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\right)}{(\Gamma(x))^k a_i^{x+1}} = S_{in} + \frac{\gamma_{in}}{x^n}.$$

Durch Subtraktion ergibt sich

$$\gamma_{in} = \varepsilon_{in} - (\Gamma(x))^k a_i^x x^n \sum_x^\infty \frac{\varphi_i(x)}{(\Gamma(x))^k a_i^{x+1} x^n},$$

$$\varphi_i(x) = x^n\left[f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \dots y_m\right) - f_i\left(\frac{1}{x}, S_{1,n-1}, \dots S_{m,n-1}\right)\right].$$

Es ist

$$C_{i1} = -\frac{B_{i1}}{a_i} = -\frac{A^{(i)}_{1,0,\dots 0}}{a_i}$$

und wie in § 9

$$|A^{(i)}_{1,0,\dots 0}| \leqq \frac{Hq}{2},$$

also wegen $|a_i| > q$

$$|C_{i1}| = \frac{|A^{(i)}_{1,0,\dots 0}|}{|a_i|} < \frac{H}{2};$$

wenn $\mathfrak{x}_0 \geqq x_0$ hinreichend groß gewählt wird, ist für $x \geqq \mathfrak{x}_0$

$$|S_{i,n-1}| \leqq \frac{H}{x}.$$

Da auch

$$|y_i| \leqq \frac{H}{x}$$

ist, so hat man für $x \geqq \mathfrak{x}_0$ wie in § 9

$$|\varphi_i(x)| \leqq G(|\gamma_{1,n-1}| + \dots + |\gamma_{m,n-1}|),$$

also $\lim\limits_{x=\infty} \varphi_i(x) = 0$. Aus

$$|\gamma_{in}| \leqq |\varepsilon_{in}| + \sum_{\lambda=0}^\infty \frac{|\varphi_i(x+\lambda)|}{(x(x+1)\cdots(x+\lambda-1))^k |a_i|^{\lambda+1}}$$

folgt $\lim\limits_{x=\infty} \gamma_{in} = 0$.

Über die Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$.

Von Herrn *Harald Bohr* in Kopenhagen.

Einleitung.

In einer sehr interessanten Note: „Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de *Riemann* n'a pas de zéros dans le demi-plan $\Re(s) > \frac{1}{2}$“*) hat Herr *Littlewood* u. a. den folgenden Satz mitgeteilt: *Bei jedem $\delta > 0$ hat entweder die Funktion $\zeta(s)$ oder die Funktion $\zeta'(s)$ in der Halbebene $\sigma = \Re(s) > 1 - \delta$ unendlich viele Nullstellen.* Anders ausgedrückt sagt dieser Satz aus: Wenn die obere Grenze der reellen Teile der Nullstellen der Zetafunktion kleiner als 1 ist (also speziell wenn die *Riemann*sche Vermutung: $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$, richtig ist), hat die Funktion $\zeta'(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1 - \delta$ unendlich viele Nullstellen.

Nach diesem *Littlewood*schen Satze war es offenbar von wesentlichem Interesse zu entscheiden, ob die Funktion $\zeta'(s)$ in jeder Halbebene $\sigma > 1 - \delta$ $(\delta > 0)$ unendlich viele Nullstellen besitzt oder nicht.

Ich werde in dieser Abhandlung dieses Problem erledigen, und zwar werde ich beweisen: *Die Funktion $\zeta'(s)$ hat, sogar in der Halbebene $\sigma > 1$, unendlich viele Nullstellen.*

Dieses Resultat, in welchem der obige *Littlewood*sche Satz speziell enthalten ist, leite ich ab durch eine arithmetisch-analytische Methode, welche ich schon in einigen früheren Abhandlungen**) zur Untersuchung der Zetafunktion verwendet habe. Ich wende diese Methode nicht direkt

*) Comptes rendus de l'Académie des sciences, Paris, 29. Januar 1912.

**) Insbesondere in der Abhandlung: Über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$, Nachrichten der Kgl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Kl. 1911.

auf die Funktion $\zeta'(s)$ sondern auf die Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ an und werde mich nicht auf den bloßen Nachweis der Existenz unendlich vieler Nullstellen der Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ (d. h. der Funktion $\zeta'(s)$) für $\sigma > 1$ beschränken, sondern vielmehr das Verhalten von $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ genau studieren*).

Von den in dieser Abhandlung dargelegten Resultaten seien im voraus nur die beiden folgenden erwähnt, welche mir recht bemerkenswert scheinen:

I: *Es gibt eine absolute (d. h. von nichts abhängige) Konstante* $D > 1$ *mit folgender Eigenschaft:*

1. *Bei jedem festen* $\sigma_0 > D$ *liegen die Werte, welche die Funktion* $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ *auf der vertikalen Geraden* $\sigma = \sigma_0$ *annimmt, sämtlich im Innern (inkl. Begrenzung) eines konzentrischen Kreisringes, und zwar in diesem Kreisringe überall dicht.*

2. *Bei jedem festen* $1 < \sigma_0 \leqq D$ *liegen die Werte, welche die Funktion* $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ *auf der vertikalen Geraden* $\sigma = \sigma_0$ *annimmt, sämtlich im Innern (inkl. Begrenzung) eines Kreises, und zwar in diesem Kreise überall dicht.*

II: *Die Funktion* $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ *nimmt in der Halbebene* $\sigma > 1$ *jeden Wert an, sogar unendlich oft; allgemeiner: Zu jedem* $E > 0$ *gibt es eine Zahl* $\sigma' = \sigma'(E) > 1$ *derart, daß die Funktion* $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ *in jedem Streifen* $a < \sigma < b$, *wo* $1 < a < b < \sigma'$ *ist, jeden Wert* z *im Kreise* $|z| < E$ *unendlich oft annimmt.*

§ 1.

Bestimmung der Menge $M(\sigma_0)$ aller Werte, welche die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}}$$

bei festem $\sigma_0 > 1$ annimmt, wenn die reellen Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ unabhängig voneinander alle reellen Werte durchlaufen.

Es sei $\sigma_0 > 1$ fest. Dann ist bekanntlich die unendliche Reihe

*) Bei manchen Untersuchungen (z. B. beim Beweise des Primzahlsatzes) ist es gerade die Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ (und nicht die Funktion $\zeta(s)$ selbst), welche die Hauptrolle spielt.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-p_n^{-(\sigma_0+it)}\log p_n}{1-p_n^{-(\sigma_0+it)}},$$

wo p_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ die n-te Primzahl bedeutet, für alle reellen t konvergent und stellt die Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0+it)$ dar.

Es sei zur Abkürzung

$$\pi - t\log p_n = \mu_n$$

gesetzt; dann ist

$$-p_n^{-(\sigma_0+it)} = p_n^{-\sigma_0}e^{i\mu_n}$$

und

$$\text{(1.)}\qquad \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0+it)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n^{-\sigma_0}e^{i\mu_n}\log p_n}{1+p_n^{-\sigma_0}e^{i\mu_n}}.$$

Auf der rechten Seite von (1.) sind die reellen Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, \ldots$ Funktionen des reellen Parameters t, während die sämtlichen anderen Größen von t nicht abhängen.

Ich werde nunmehr in diesem Paragraphen die allgemeinere Reihe

$$\text{(2.)}\qquad F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n^{-\sigma_0}e^{i\varphi_n}\log p_n}{1+p_n^{-\sigma_0}e^{i\varphi_n}}$$

untersuchen, wo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ beliebige reelle Zahlen sind.

Wegen der Konvergenz der Reihe mit positiven Gliedern

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n^{-\sigma_0}\log p_n}{1-p_n^{-\sigma_0}}$$

ist die Reihe (2.) für jede reelle Zahlenfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ konvergent und stellt eine Zahl $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots)$ dar.

Es bezeichne $M = M(\sigma_0)$ die Menge aller derjenigen Zahlen, welche die unendliche Reihe (2.) annimmt, wenn in ihr die reellen Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ unabhängig voneinander alle reellen Werte, oder, was offenbar auf dasselbe herauskommt, alle reellen Werte zwischen 0 (inkl.) und 2π (exkl.) durchlaufen; mit anderen Worten: die Zahl z gehört dann und nur dann zur Menge M, wenn eine reelle Zahlenfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ derart existiert, daß $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots) = z$ ist.

Ich werde nun zunächst die Zahlenmenge $M = M(\sigma_0)$ bestimmen. Zu diesem Zwecke betrachte ich das allgemeine Glied der Reihe (2.), d. h. die Zahl

$$\alpha_n = \alpha_n(\varphi_n) = \frac{p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}}.$$

Wenn in diesem Gliede die reelle Zahl φ_n von 0 (inkl.) bis 2π (exkl.) läuft, durchläuft in der komplexen Ebene die Zahl $\beta_n = p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}$ einen Kreis mit dem Mittelpunkte 0 und dem Radius $p_n^{-\sigma_0}$; hieraus folgt aber unmittelbar, daß in der komplexen Ebene die Zahl

$$\alpha_n = \frac{\beta_n \log p_n}{1 + \beta_n}$$

einen Kreis mit dem Mittelpunkte

(3.) $$c_n = -\frac{p_n^{-2\sigma_0} \log p_n}{1 - p_n^{-2\sigma_0}}$$

und dem Radius

(4.) $$\varrho_n = \frac{p_n^{-\sigma_0} \log p_n}{1 - p_n^{-2\sigma_0}}$$

durchläuft (nämlich denjenigen Kreis, welcher durch die lineare Transformation $y = \frac{x \cdot \log p_n}{1 + x}$ aus dem Kreise $|x| = p_n^{-\sigma_0}$ hervorgeht).

Es ist also

$$\alpha_n = c_n + \varrho_n e^{i\theta_n},$$

wo die reelle Zahl $\theta_n = \theta_n(\varphi_n)$ sämtliche Werte (modulo 2π) durchläuft, wenn die reelle Zahl φ_n von 0 (inkl.) bis 2π (exkl.) läuft.

Hiermit ist bewiesen: Die gesuchte Zahlenmenge $M = M(\sigma_0)$ ist identisch mit der Menge aller Werte, welche die Funktion

$$G(\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + \varrho_n e^{i\theta_n})$$

annimmt, wenn in ihr die reellen Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n, \ldots$ unabhängig voneinander alle reellen Werte, oder, was auf dasselbe herauskommt, alle reellen Werte zwischen 0 (inkl.) und 2π (exkl.) durchlaufen.

Es sind hierbei die beiden Reihen

(5.) $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-p_n^{-2\sigma_0} \log p_n}{1 - p_n^{-2\sigma_0}}$$

und

(6.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0} \log p_n}{1 - p_n^{-2\sigma_0}}$$

konvergent. Ferner bemerke ich, daß bei festem $\sigma_0 > 1$

$$\varrho_1 > \varrho_2 > \cdots > \varrho_n \cdots$$

ist; denn es ist

$$\varrho_n = \frac{1}{\sigma_0}\,\frac{p_n^{\sigma_0}\log\left(p_n^{\sigma_0}\right)}{p_n^{2\sigma_0}-1},$$

und es ist für $y \geqq 2$ die Funktion

$$f(y) = \frac{y\log y}{y^2-1}$$

eine mit wachsendem y stets abnehmende Funktion von y. Dies letzte ergibt sich etwa folgendermaßen: Es ist die Funktion

$$g(y) = (y^2-1)^2 f'(y) = y^2 - [y^2\log y + 1 + \log y]$$

wegen der für $y \geqq 2$ giltigen Ungleichung

$$g'(y) = y - \left[2y\log y + \frac{1}{y}\right] < y(1-2\log 2) = y\log\frac{e}{4} < 0$$

eine mit wachsendem $y \geqq 2$ stets abnehmende Funktion von y; nun ist aber

$$g(2) = 3 - 5\log 2 = \log\frac{e^3}{2^5} < \log\frac{3^3}{2^5} = \log\frac{27}{32} < 0;$$

es ist also $g(y)$ für $y \geqq 2$ negativ, d. h. es ist für $y \geqq 2$ $f'(y) < 0$, also $f(y)$ eine mit wachsendem y stets abnehmende Funktion von y, q. e. d.

Es bezeichne C die Summe der Reihe (5.); dannn ergibt sich

$$G(\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n, \ldots) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n e^{i\theta_n}.$$

Es ist hierdurch die Bestimmung der Zahlenmenge M auf die Bestimmung der Menge aller derjenigen Werte zurückgeführt, welche die unendliche Reihe

$$H(\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n e^{i\theta_n}$$

annimmt, wenn in ihr die reellen Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n, \ldots$ unabhängig voneinander alle reellen Werte durchlaufen.

Da $\varrho_1 > \varrho_n > 0$ $(n = 2, 3, \ldots)$ ist sowie $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n$ konvergiert, gilt aber hier, wie ich an anderem Orte*) gezeigt habe, der folgende sehr leicht beweisbare Satz: Es liegen die Werte der Funktion $H(\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n, \ldots)$, je nachdem

$$\varrho_1 \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \varrho_n$$

bzw.

*) Lösung des absoluten Konvergenzproblems einer allgemeinen Klasse *Dirichlet*scher Reihen, § 1. (Die Arbeit erscheint demnächst in den Acta Mathematica.)

$$\varrho_1 > \sum_{n=2}^{\infty} \varrho_n$$

ist, sämtlich im Gebiete

$$|z| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n \tag{7.}$$

bzw. im Gebiete

$$\varrho_1 - \sum_{n=2}^{\infty} \varrho_n \leqq |z| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n, \tag{8.}$$

und es nimmt die Funktion $H(\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n, \ldots)$ jeden Wert in dem Kreise (7.) bzw. in dem Kreisringe (8.) an. Hieraus ergibt sich unmittelbar der folgende

Hilfssatz 1: *Es liegen in der komplexen Ebene die Werte, welche die unendliche Reihe* (2.) *annimmt, je nachdem*

$$\varrho_1 \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \varrho_n$$

bzw.

$$\varrho_1 > \sum_{n=2}^{\infty} \varrho_n$$

ist, sämtlich in einem Kreise (inkl. Begrenzung) mit dem Mittelpunkte C und dem Radius

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n$$

bzw. in einem konzentrischen Kreisringe (inkl. Begrenzung) mit dem Mittelpunkt C, dem äußeren Radius

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n$$

und dem inneren Radius

$$r = \varrho_1 - \sum_{n=2}^{\infty} \varrho_n,$$

und es nimmt die Funktion $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots)$ *jeden Wert im Innern und auf der Begrenzung dieses Kreises bzw. Kreisringes an.*

Hiermit ist, bei jedem festen $\sigma_0 > 1$, die Menge $M(\sigma_0)$ aller derjenigen Werte, welche die unendliche Reihe (2.) annimmt, bestimmt. Ich werde nunmehr die Art und Weise untersuchen, in welcher die Zahlenmenge $M(\sigma_0)$ sich ändert, wenn die reelle Variable σ_0 von 1 bis ∞ läuft, und zwar zunächst entscheiden, für welche Werte von σ_0 der eine und für welche Werte von σ_0 der andere der beiden obigen Fälle (d. h. Kreis oder Kreisring) eintritt. Dies letzte Problem wird durch den folgenden Satz erledigt.

Hilfssatz 2: *Es sei wie oben für* $\sigma_0 > 1$

$$(4.) \qquad \varrho_n = \varrho_n(\sigma_0) = \frac{p_n^{-\sigma_0}\log p_n}{1-p_n^{-2\sigma_0}}$$

gesetzt. Dann existiert eine absolute Konstante $D > 1$ *derart, daß*

$$\varrho_1(D) = \sum_{n=2}^{\infty}\varrho_n(D)$$

ist, während für alle $\sigma_0 > D$

$$\varrho_1(\sigma_0) > \sum_{n=2}^{\infty}\varrho_n(\sigma_0)$$

sowie für alle $1 < \sigma_0 < D$

$$\varrho_1(\sigma_0) < \sum_{n=2}^{\infty}\varrho_n(\sigma_0)$$

ist.

Beweis: Es ist für alle $n = 1, 2, \ldots$ und $\sigma_0 > 1$

$$p_n^{-\sigma_0}\log p_n < \varrho_n(\sigma_0) < \frac{4}{3}\cdot p_n^{-\sigma_0}\log p_n;$$

ferner ist bekanntlich die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-\sigma_0}\log p_n$$

für $\sigma_0 > 1$ konvergent, und zwar für $\sigma_0 > 1+\delta$ $(\delta > 0)$ gleichmäßig, und es ist

$$\lim_{\sigma_0=\infty}\frac{\sum_{n=2}^{\infty} p_n^{-\sigma_0}\log p_n}{2^{-\sigma_0}\log 2} = 0$$

sowie für zu 1 abnehmendes σ_0

$$\lim_{\sigma_0=1}\frac{\sum_{n=2}^{\infty} p_n^{-\sigma_0}\log p_n}{2^{-\sigma_0}\log 2} = \infty.$$

Hieraus folgt zunächst unmittelbar, daß für alle hinreichend großen σ_0, d. h. für $\sigma_0 > \sigma'$

$$\varrho_1 > \sum_{n=2}^{\infty}\varrho_n$$

ist, während für alle hinreichend nahe an 1 gelegenen σ_0, d. h. für $1 < \sigma_0 < \sigma''$

$$\varrho_1 < \sum_{n=2}^{\infty}\varrho_n$$

ist. Es ist daher offenbar der Hilfssatz 2 bewiesen, wenn ich nachgewiesen habe: Es ist die für $\sigma_0 > 1$ definierte positive, stetige Funktion

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\varrho_n(\sigma_0)}{\varrho_1(\sigma_0)} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varrho_n(\sigma_0)}{\varrho_1(\sigma_0)}$$

eine mit wachsendem $\sigma_0 > 1$ stets abnehmende Funktion von σ_0, also speziell, wenn ich nachgewiesen habe: Es nimmt, bei jedem festen $n \geqq 2$, die Funktion

$$\frac{\varrho_n(\sigma_0)}{\varrho_1(\sigma_0)} = \frac{p_n^{-\sigma_0}\log p_n}{1-p_n^{-2\sigma_0}} : \frac{2^{-\sigma_0}\log 2}{1-2^{-2\sigma_0}}$$

d. h. die Funktion

$$h_n(\sigma_0) = \log\Big(\frac{p_n^{-\sigma_0}}{1-p_n^{-2\sigma_0}}\Big) - \log\Big(\frac{2^{-\sigma_0}}{1-2^{-2\sigma_0}}\Big)$$

mit wachsendem $\sigma_0 > 1$ stets ab; und daß dies letzte der Fall ist, beweise ich dadurch, daß ich zeige: Es ist für $\sigma_0 > 1$ die Funktion

$$h_n'(\sigma_0) = \frac{1+2^{-2\sigma_0}}{1-2^{-2\sigma_0}} \cdot \log 2 - \frac{1+p_n^{-2\sigma_0}}{1-p_n^{-2\sigma_0}} \cdot \log p_n$$

negativ. Im Falle $n \geqq 3$, d. h. $p_n \geqq 5$ ist die Richtigkeit der Ungleichung $h_n'(\sigma_0) < 0$ unmittelbar einzusehen; denn es ist für $n \geqq 3$, $\sigma_0 > 1$

$$h_n'(\sigma_0) < \frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \cdot \log 2 - \log p_n \leqq \frac{5}{3}\log 2 - \log 5 = \frac{1}{3}\log\frac{2^5}{5^3} = \frac{1}{3}\log\frac{32}{125} < 0;$$

und im Falle $n = 2$, d. h. $p_n = 3$, ergibt sich

$$h_2'(\sigma_0) = \frac{1+\frac{1}{4^{\sigma_0}}}{1-\frac{1}{4^{\sigma_0}}}\log 2 - \frac{1+\frac{1}{9^{\sigma_0}}}{1-\frac{1}{9^{\sigma_0}}} \cdot \log\ 3 < \frac{4}{3}\Big(1+\frac{1}{4^{\sigma_0}}\Big)\log 2 - \Big(1+\frac{1}{9^{\sigma_0}}\Big)\log 3,$$

also, wegen

$$\frac{4}{3}\log 2 - \log 3 = \frac{1}{3}\log\frac{2^4}{3^3} = \frac{1}{3}\log\frac{16}{27} < 0$$

und

$$\frac{1}{4^{\sigma_0}} - \frac{1}{9^{\sigma_0}} < \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36} \qquad (\text{für } \sigma_0 > 1),$$

$$h_2'(\sigma_0) < \frac{4}{3}\log 2 - \log 3 + \frac{4}{3}\log 2\Big(\frac{1}{4^{\sigma_0}} - \frac{1}{9^{\sigma_0}}\Big) < \frac{4}{3}\log 2 - \log 3 + \frac{4}{3}\log 2 \cdot \frac{5}{36}$$

$$= \frac{41}{27}\log 2 - \log 3 < \frac{11}{7}\log 2 - \log 3 = \frac{1}{7}\log\frac{2^{11}}{3^7} = \frac{1}{7}\log\frac{2048}{2187} < 0.$$

Hiermit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

Es mögen, wie oben $C = C(\sigma_0)$, $R = R(\sigma_0)$ und $r = r(\sigma_0)$ diejenigen stetigen Funktionen von σ_0 bezeichnen, welche durch die drei Gleichungen

$$C = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{-2\sigma_0}\log p_n}{1-p_n^{-2\sigma_0}} \qquad (\text{für } \sigma_0 > 1),$$

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0} \log p_n}{1 - p_n^{-2\sigma_0}} \qquad (\text{für } \sigma_0 > 1)$$

und

$$r = \frac{2^{-\sigma_0} \log 2}{1 - 2^{-2\sigma_0}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0} \log p_n}{1 - p_n^{-2\sigma_0}} \qquad (\text{für } \sigma_0 > D)$$

definiert sind, und es bezeichne, für $\sigma_0 > 1$, $K = K(\sigma_0)$ den Kreis mit dem Mittelpunkte C und dem Radius R, sowie, für $\sigma_0 > D$, $k = k(\sigma_0)$ den Kreis mit dem Mittelpunkte C und dem Radius r.

Dann ergibt sich zunächst nach dem Hilfssatz 1 das Verhalten von $M(\sigma_0)$ *für ins Unendliche wachsendes* σ_0 aus den folgenden unmittelbar zu verifizierenden Gleichungen

$$\lim_{\sigma_0 = \infty} \frac{C}{-2^{-2\sigma_0} \log 2} = 1, \quad \lim_{\sigma_0 = \infty} \frac{R}{2^{-\sigma_0} \log 2} = 1, \quad \lim_{\sigma_0 = \infty} \frac{r}{2^{-\sigma_0} \log 2} = 1,$$

also speziell

$$\lim_{\sigma_0 = \infty} C = \lim_{\sigma_0 = \infty} R = \lim_{\sigma_0 = \infty} r = 0, \quad \lim_{\sigma_0 = \infty} \frac{C}{R} = \lim_{\sigma_0 = \infty} \frac{R - r}{R} = 0;$$

ferner ergibt sich das Verhalten von $M(\sigma_0)$ *für zu* 1 *abnehmendes* σ_0 dadurch, daß

$$\lim_{\sigma_0 = 1} C = C^*$$

ist, wo C^* die Summe der konvergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-p_n^{-2} \log p_n}{1 - p_n^{-2}}$$

bezeichnet, während

$$\lim_{\sigma_0 = 1} R = \infty$$

ist [hierin ist speziell enthalten, daß zu jedem $E > 0$ eine Zahl $\sigma' = \sigma'(E) > 1$ derart existiert, daß, für jedes $1 < \sigma_0 < \sigma'$, die Menge $M(\sigma_0)$ sämtliche Zahlen enthält, deren absoluter Wert $\leqq E$ ist]; schließlich ist *für zu* D *abnehmendes* σ_0

$$\lim_{\sigma_0 = D} r = 0.$$

Ferner bemerke ich, daß die Zahl $C = C(\sigma_0)$, welche dem Mittelpunkte entspricht, für jedes $\sigma_0 > 1$ eine reelle negative Zahl ist, deren absoluter Wert offenbar mit wachsendem σ_0 stets abnimmt.

Schließlich ist zu erwähnen, daß die Zahl

$$R + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma_0}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log p_n}{p_n^{\sigma_0} + 1}$$

eine positive Zahl ist, die mit wachsendem $\sigma_0 > 1$ stets abnimmt; anders ausgedrückt sagt diese letzte Bemerkung aus, *daß für alle* $\sigma_0 > 1$ *der Nullpunkt im Innern des Kreises K liegt, sowie daß, für* $1 < \sigma_1 < \sigma_2$, *der Kreis* $K(\sigma_2)$ *im Innern des Kreises* $K(\sigma_1)$ *gelegen ist.*

§ 2.

Über das Verhalten von $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ auf vertikalen Geraden $(\sigma = \sigma_0 > 1)$.

Es bezeichne $M = M(\sigma_0)$ wie in § 1 die Menge aller Werte, welche die unendliche Reihe

$$(2.) \qquad F(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}}$$

bei festem $\sigma_0 > 1$ annimmt, wenn in derselben die Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, \dots$ unabhängig voneinander alle reellen Werte durchlaufen. *Dann ist offenbar zunächst bei jedem reellen t die Zahl*

$$(1.) \qquad \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0 + it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n}},$$

wo

$$\mu_n = \pi - t \log p_n$$

ist, in der Menge $M = M(\sigma_0)$ *enthalten.*

Es sei nunmehr, bei festem $\sigma_0 > 1$, m eine beliebige Zahl der Menge $M = M(\sigma_0)$, und es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben; dann behaupte ich: *Es gibt ein reelles* t_0 *derart, daß*

$$\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0 + it_0) - m \right| < \varepsilon$$

ist. Um die Richtigkeit dieser Behauptung zu beweisen, verfahre ich folgendermaßen: Nach Voraussetzung gibt es zu der gegebenen Zahl m eine reelle Zahlenfolge $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, \dots$ derart, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}} = m$$

ist. Ich bestimme nunmehr zu der gegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ eine positive ganze Zahl N derart, daß

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0} \log p_n}{1 - p_n^{-\sigma_0}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist; dann ist

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

sowie für alle reellen t

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{p_n^{-\sigma_0}e^{i\mu_n}\log p_n}{1+p_n^{-\sigma_0}e^{i\mu_n}}\right|<\frac{\varepsilon}{3};$$

es ist also für alle reellen t

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0+it)-m\right|<\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{p_n^{-\sigma_0}e^{i\mu_n}\log p_n}{1+p_n^{-\sigma_0}e^{i\mu_n}}-\sum_{n=1}^{N}\frac{p_n^{-\sigma_0}e^{i\varphi_n}\log p_n}{1+p_n^{-\sigma_0}e^{i\varphi_n}}\right|+\frac{2\varepsilon}{3}.$$

Nachdem N festgelegt ist, bestimme ich nunmehr, was offenbar aus Stetigkeitsgründen möglich ist, ein $\varepsilon_1>0$ so (d. h. so klein), daß die Ungleichung

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{p_n^{-\sigma_0}e^{i\mu_n}\log p_n}{1+p_n^{-\sigma_0}e^{i\mu_n}}-\sum_{n=1}^{N}\frac{p_n^{-\sigma_0}e^{i\varphi_n}\log p_n}{1+p_n^{-\sigma_0}e^{i\varphi_n}}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

erfüllt ist, wenn für alle $n=1,2,\dots N$ die Zahl μ_n auf der Kreisperipherie, d. h. modulo 2π betrachtet, von der festen Zahl φ_n um weniger als ε_1 abweicht, d. h. wenn für alle $n=1,2,\dots N$ eine Ungleichung der Form

$$|\mu_n-\varphi_n-2\pi g_n|<\varepsilon_1$$

in ganzen Zahlen $g_1,g_2,\dots g_N$ besteht.

Ich wende nun genau dasselbe arithmetische Verfahren an, welches ich in der in der Einleitung zitierten Abhandlung benutzt habe, indem ich den folgenden *Kronecker*schen Satz über Diophantische Approximationen in die Betrachtungen hineinziehe:

Es seien $\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_N$ *reelle Zahlen derart, daß keine Relation der Form*

$$C_1\lambda_1+C_2\lambda_2+\cdots+C_N\lambda_N=0$$

in ganzen, nicht sämtlich verschwindenden Größen $C_1,C_2,\dots C_N$ *besteht; es seien ferner* $\nu_1,\nu_2,\dots\nu_N$ *beliebige reelle Zahlen. Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon'>0$ *eine reelle Zahl* t_0 *sowie* N *ganze Zahlen* $g_1,g_2,\dots g_N$ *derart, daß die* N *Ungleichungen*

$$|\lambda_n t_0-\nu_n-g_n|<\varepsilon' \qquad (n=1,2,\dots N)$$

sämtlich erfüllt sind.

Ich wende nun diesen Satz an auf die Zahlen

$$\lambda_n=-\frac{1}{2\pi}\log p_n, \qquad (n=1,2,\dots N)$$

$$\nu_n=-\frac{1}{2}+\frac{\varphi_n}{2\pi}, \qquad (n=1,2,\dots N)$$

$$\varepsilon'=\frac{\varepsilon_1}{2\pi}.$$

Die Voraussetzungen des Satzes sind offenbar erfüllt; denn wegen der eindeutigen Zerlegbarkeit einer ganzen positiven Zahl in Primfaktoren

besteht keine Relation der Form $C_1 \log p_1 + \cdots + C_N \log p_N = 0$ (d. h. der Form $p_1^{C_1} \cdots p_N^{C_N} = 1$) in ganzen nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $C_1, \ldots C_N$.

Der *Kronecker*sche Satz ergibt alsdann die Existenz eines reellen t_0, sowie dazu gehöriger ganzer Zahlen $g_1, g_2, \ldots g_N$ derart, daß für alle $n = 1, 2, \ldots N$ die Ungleichung

$$\left| -\frac{1}{2\pi} \log p_n \cdot t_0 + \frac{1}{2} - \frac{\varphi_n}{2\pi} - g_n \right| < \frac{\varepsilon_1}{2\pi},$$

d. h. wenn ich mit 2π multipliziere und $\mu_n = \mu_n(t_0)$ statt $-t_0 \log p_n + \pi$ schreibe, die Ungleichung

$$|\mu_n - \varphi_n - 2\pi g_n| < \varepsilon_1 \qquad (n=1, 2, \ldots N)$$

besteht. Für dieses t_0 ist alsdann

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Hieraus ergibt sich nun weiter

$$\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0 + it_0) - m \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Indem ich nunmehr die in diesem Paragraphen gefundenen Resultate mit dem Ergebnisse des § 1 kombiniere, ergibt sich unmittelbar der folgende, schon in der Einleitung erwähnte

Satz: Es existiert eine absolute Konstante $D > 1$ *mit folgender Eigenschaft:*

1. *Bei jedem festen* $\sigma_0 > D$ *liegen die Werte, welche die Funktion* $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ *auf der vertikalen Geraden* $\sigma = \sigma_0$ *annimmt, sämtlich im Innern (inkl. Begrenzung) eines konzentrischen Kreisringes mit dem Mittelpunkte C, dem äußeren Radius R und dem inneren Radius r, und zwar in diesem Kreisringe überall dicht.*

2. *Bei jedem festen* $1 < \sigma_0 \leqq D$ *liegen die Werte,, welche die Funktion* $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ *auf der vertikalen Geraden* $\sigma = \sigma_0$ *annimmt, sämtlich im Innern (inkl. Begrenzung) eines Kreises mit dem Mittelpunkte C und dem Radius R, und zwar in diesem Kreise überall dicht.*

Hierbei bedeuten C, R und r diejenigen stetigen Funktionen von σ_0, *welche durch die drei folgenden Gleichungen definiert sind:*

$$C = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{-2\sigma_0} \log p_n}{1 - p_n^{-2\sigma_0}} \qquad (\text{für } \sigma_0 > 1),$$

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0} \log p_n}{1 - p_n^{-2\sigma_0}} \qquad (\text{für } \sigma_0 > 1),$$

$$r = \frac{2^{-\sigma_0} \log 2}{1 - 2^{-2\sigma_0}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0} \log p_n}{1 - p_n^{-2\sigma_0}} \qquad (\text{für } \sigma_0 > D).^*)$$

Ferner ist

α) für ins Unendliche wachsendes σ_0

$$\lim_{\sigma_0 = \infty} C = \lim_{\sigma_0 = \infty} R = \lim_{\sigma_0 = \infty} r = 0; \quad \lim_{\sigma_0 = \infty} \frac{C}{R} = \lim_{\sigma_0 = \infty} \frac{R - r}{R} = 0;$$

β) für zu 1 *abnehmendes* σ_0

$$\lim_{\sigma_0 = 1} R = \infty, \quad \lim_{\sigma_0 = 1} C = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log p_n}{p_n^2 - 1} = \frac{\zeta'}{\zeta}(2);$$

γ) für zu D *abnehmendes* σ_0

$$\lim_{\sigma_0 = D} r = 0.$$

Schließlich ist für alle $\sigma_0 > 1$ *der Nullpunkt im Innern des Kreises* $K = K(\sigma_0)$ *mit dem Mittelpunkte* C *und dem Radius* R *enthalten, und es ist für* $1 < \sigma_1 < \sigma_2$ *der Kreis* $K(\sigma_2)$ *innerhalb des Kreises* $K(\sigma_1)$ *gelegen.*

§ 3.

Bestimmung der Werte, welche die Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ in unendlicher Nähe der Geraden $\sigma = \sigma_0 (> 1)$ annimmt.

Unter dem Ausdruck: Es nimmt die Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ den Wert z in unendlicher Nähe der Geraden $\sigma = \sigma_0$ (> 1) an, ist zu verstehen: Bei jedem $\delta > 0$ nimmt die Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ im Streifen $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ den Wert z an. Dann werde ich beweisen: *Es ist bei jedem* $\sigma_0 > 1$ *die Menge der Werte, welche* $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ *in unendlicher Nähe der Geraden* $\sigma = \sigma_0$ *annimmt, mit der in* § 1 *definierten Menge* $M(\sigma_0)$ *aller Werte, welche die unendliche Reihe* (2.) *annimmt, identisch.*

Es ist zunächst klar, daß jeder Wert z, welchen die Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ in unendlicher Nähe der Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt, der Menge $M(\sigma_0)$ angehören muß; denn wegen der Stetigkeit der beiden Zahlen $C = C(\sigma_0)$

*) Aus den obigen Gleichungen ergibt sich übrigens unmittelbar, daß $C = \frac{\zeta'}{\zeta}(2\sigma_0)$ und $R = \frac{\zeta'}{\zeta}(2\sigma_0) - \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0)$ ist.

und $R = R(\sigma_0)$ für $\sigma_0 > 1$, sowie der Stetigkeit von $r = r(\sigma_0)$ für $\sigma_0 > D$, ergibt sich unmittelbar, daß es, wenn z der Menge $M(\sigma_0)$ nicht angehört, eine Zahl $\delta_1 > 0$ derart gibt, daß die Zahl z für kein σ des Intervalles $\sigma_0 - \delta_1 < \sigma < \sigma_0 + \delta_1$ der Menge $M(\sigma)$ angehört, also a fortiori derart, daß im Streifen $\sigma_0 - \delta_1 < \sigma < \sigma_0 + \delta_1$ $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \neq z$ ist. Es ist daher offenbar der obige Satz bewiesen, wenn ich nachgewiesen habe: *Es sei m eine Zahl der Menge $M(\sigma_0)$; dann nimmt die Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ in jedem Streifen $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ $(\delta > 0)$ den Wert m an.*

Es werde angenommen, dies sei nicht der Fall; dann gäbe es eine feste Zahl $d > 0$, die ich offenbar kleiner als $\sigma_0 - 1$ annehmen darf, derart, daß im Streifen $\sigma_0 - d < \sigma < \sigma_0 + d$ $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \neq m$ wäre. Ich werde zeigen, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt. Zu diesem Zwecke verfahre ich folgendermaßen: Nach Voraussetzung existiert zu der gegebenen Zahl m eine reelle Zahlenfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ derart, daß

$$(9.) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}} = m$$

ist. Ich betrachte alsdann die für $\sigma > 1$ definierte reguläre Funktion der komplexen Variabeln $s = \sigma + it$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{-s} e^{i\varphi_n} \log p_n}{1 + p_n^{-s} e^{i\varphi_n}},$$

wo $\varphi_n (n = 1, 2, \ldots)$ dieselben festen (d. h. von s unabhängigen) Zahlen sind, welche in der obigen Reihe (9.) vorkommen. Dann ist speziell $f(\sigma_0) = m$. Ich wähle nunmehr eine reelle Zahl σ' im Intervalle $\sigma_0 < \sigma < \sigma_0 + \frac{d}{3}$ derart, daß $f(\sigma') \neq m$ ist. Eine solche Wahl ist offenbar möglich; denn sonst wäre die analytische Funktion $f(s)$ im ganzen reellen Intervalle $\sigma_0 < s < \sigma_0 + \frac{d}{3}$, also in der ganzen Halbebene $\sigma > 1$, konstant (übrigens $= m$), was offenbar, wie z. B. aus der Gleichung

$$\lim_{\sigma = \infty} \frac{f(s)}{2^{-s} \cdot e^{i\varphi_1} \cdot \log 2} = 1$$

unmittelbar hervorgeht, nicht der Fall ist.

Ich setze nunmehr $\sigma' = \sigma_0 + \delta'$; dann ist $0 < \delta' < \frac{d}{3}$ und $f(\sigma') = z$, wo $z \neq m$ ist.

Ich werde nun zunächst beweisen: Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein reelles t_0 derart, daß die beiden Ungleichungen

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0 + it) - m\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma' + it) - z\right| < \varepsilon$$

für $t = t_0$ gleichzeitig erfüllt sind.

Um die Existenz eines solchen t_0 zu beweisen, bestimme ich zunächst eine ganze Zahl N derart, daß

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0} \log p_n}{1 - p_n^{-\sigma_0}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist; wegen $\sigma' > \sigma_0$ ist hierbei auch

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma'} \log p_n}{1 - p_n^{-\sigma'}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es folgt alsdann, ganz wie im § 2, wenn ich wieder die Bezeichnung $\mu_n = \mu_n(t) = \pi - t \log p_n$ einführe, daß für alle reellen t

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0 + it) - m\right| < \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}}\right| + \frac{2\varepsilon}{3}$$

und

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma' + it) - z\right| < \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{p_n^{-\sigma'} e^{i\mu_n} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma'} e^{i\mu_n}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n^{-\sigma'} e^{i\varphi_n} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma'} e^{i\varphi_n}}\right| + \frac{2\varepsilon}{3}$$

ist. Ich bestimme nunmehr mit Hilfe des *Kroneckers*chen Satzes über Diophantische Approximationen ein reelles t_0 derart, daß für alle $n = 1, 2, \ldots N$ die Zahl $\mu_n(t_0) = \pi - t_0 \log p_n$, wenn man sie auf der Kreisperipherie, d. h. modulo 2π, betrachtet, um so wenig von der festen Zahl φ_n abweicht, daß die beiden Ungleichungen

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

und

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{p_n^{-\sigma'} e^{i\mu_n} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma'} e^{i\mu_n}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n^{-\sigma'} e^{i\varphi_n} \log p_n}{1 + p_n^{-\sigma'} e^{i\varphi_n}}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für $t = t_0$ erfüllt sind. Dann ist für dieses t_0

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0 + it_0) - m\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma' + it_0) - z\right| < \varepsilon,$$

und es ist somit die obige Behauptung bewiesen.

Es folgt hieraus unmittelbar die Existenz einer Folge von reellen Zahlen $t_1, t_2, \ldots t_n, \ldots$ derart, daß gleichzeitig

$$\lim_{n=\infty}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0+it_n)=m,\quad \lim_{n=\infty}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma'+it_n)=z$$

ist.

Es ist nunmehr nach Annahme $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ im Streifen $\sigma_0-d<\sigma<\sigma_0+d$ von m verschieden, und es bezeichne unter dieser Annahme $F(s)$ einen beliebigen, für $\sigma_0-d<\sigma<\sigma_0+d$ regulären Zweig der Funktion

$$\log\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)-m\right).$$

Dann ist im Streifen $\sigma_0-d<\sigma<\sigma_0+d$ $\Re(F(s))$ nach oben beschränkt; denn es ist in diesem Streifen

$$\Re(F(s))=\log\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)-m\right|<\log\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0-d)+|m|\right)<k_1,$$

wo die positive Größe k_1 (sowie in der Folge $k_2>0$, $k_3>0,\ldots$) von s nicht abhängt. Ferner ist, wegen

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma'+it_n)-m\right)=z-m\neq 0,$$

für alle $n=1,2,\ldots$

$$\Re(F(\sigma'+it_n))=\log\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma'+it_n)-m\right|$$

auch nach unten beschränkt; d. h. es ist

$$-\Re(F(\sigma'+it_n))<k_2,$$

wo k_2 von n unabhängig ist.

Ich betrachte nunmehr das Verhalten der Funktion $F(s)$ im Kreise K_n $(n=1,2,\ldots)$ mit dem Mittelpunkte $s_0=\sigma'+it_n$ und dem Radius $r=2(\sigma'-\sigma_0)=2\delta'$. Es ist hier für alle $n=1,2,\ldots$

$$\Re(F(s_0))<k_1,\quad -\Re(F(s_0))<k_2,$$

also

$$|\Re(F(s_0))|<k_3, \tag{10.}$$

wo k_3 die größere der beiden Zahlen k_1 und k_2 bedeutet; ferner ist im Streifen $\sigma_0-d<\sigma<\sigma_0+d$, also a fortiori im Kreise $|s-s_0|\leqq r$

$$\Re(F(s))<k_1. \tag{11.}$$

Aus (10.) und (11.) folgt aber unmittelbar nach einem bekannten *Carathéodory*schen Satze*), daß für $|s-s_0|\leqq\frac{r}{2}=\delta'$

*) Siehe z. B. *E. Landau:* Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen (Leipzig und Berlin, 1909) Bd. 1. § 73.

$$|\Re(F(s))| < 3k_3 + 2k_1 = k_4$$

ist, wo k_4 von n und s nicht abhängt.

Es wäre also, speziell im Punkte $s = \sigma_0 + it_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, welcher vom Punkte $s_0 = \sigma' + it_n$ genau den Abstand δ' hat,

$$-\Re(F(s)) < k_4;$$

d. h. es wäre für alle $n = 1, 2, \ldots$

$$\left| 1 : \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0 + it_n) - m \right) \right| = e^{-\Re(F(\sigma_0 + it_n))} < e^{k_4} = k_5$$

im Gegensatze zur obigen Gleichung $\lim_{n=\infty} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0 + it_n) = m$.

Es muß also unsere Annahme $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \neq m$ für $\sigma_0 - d < \sigma < \sigma_0 + d$ falsch gewesen sein.

Hiermit ist der obige Satz bewiesen, und es ist somit bei jedem $\sigma_0 > 1$ die Menge der Werte, welche die Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ in unendlicher Nähe der Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt, völlig bestimmt.

Da, mit den Bezeichnungen des § 2, zu jedem $E > 0$, eine Zahl $\sigma' = \sigma'(E) > 1$ derart existiert, daß für jedes $1 < \sigma_0 < \sigma'$ der Kreis $K = K(\sigma_0)$ einen Kreis mit dem Mittelpunkte 0 und dem Radius E im Innern enthält, ergibt sich offenbar speziell aus dem obigen Satze: *Zu jedem* $E > 0$ *gibt es eine Zahl* $\sigma' = \sigma'(E) > 1$ *derart, daß die Funktion* $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ *in jedem Streifen* $a < \sigma < b$, *wo* $1 < a < b < \sigma'$ *ist, jeden Wert im Kreise* $|z| < E$ *unendlich oft annimmt.* Aus diesem letzten Satze folgt speziell, *daß die Funktion* $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ *in der Halbebene* $\sigma > 1$ *(allgemeiner: bei jedem* $\delta > 0$ *im Streifen* $1 < \sigma < 1 + \delta$*) jeden Wert unendlich oft annimmt.*

Zum Schluß werde ich noch den folgenden ganz interessanten Satz über die Nullstellen der Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$, d. h. der Funktion $\zeta'(s)$, für $\sigma > 1$ beweisen:

Mit dem Ausdruck: Die reelle Zahl ν ist eine Nullabszisse der Funktion $\zeta'(s)$, sei zu verstehen: Es nimmt die Funktion $\zeta'(s)$ auf der vertikalen Geraden $\sigma = \nu$ den Wert 0 an. *Dann gibt es eine absolute Konstante* $D_1 > D$, *wo* D *die absolute Konstante des* § 2 *bedeutet, derart, daß die sämtlichen Nullabszissen der Funktion* $\zeta'(s)$, *welche* > 1 *sind, dem Intervalle* $1 < \sigma \leqq D_1$ *angehören und zwar in diesem Intervalle überall dicht liegen.*

Beweis: Die Richtigkeit dieses Satzes ist offenbar bewiesen, wenn ich nachgewiesen habe: Es gibt eine absolute Konstante $D_1 > D$ derart, daß die Zahl 0 der Zahlenmenge $M(\sigma_0)$ angehört bzw. nicht angehört, je nachdem $1 < \sigma_0 \leqq D_1$ bzw. $\sigma_0 > D_1$ ist.

Da für jedes $\sigma_0 > 1$ der Nullpunkt im Kreise $K(\sigma_0)$ liegt, ergibt sich zunächst unmittelbar, daß für $1 < \sigma_0 \leqq D$ die Zahl 0 der Zahlenmenge $M(\sigma_0)$ angehört.

Es sei nunmehr $\sigma_0 > D$; dann gehört offenbar die Zahl 0 der Zahlenmenge $M(\sigma_0)$ an bzw. nicht an, je nachdem $C + r \leqq 0$ bzw. $C + r > 0$ ist, d. h. je nachdem die reelle Zahl

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{-2\sigma_0} \log p_n}{1 - p_n^{-2\sigma_0}} + \left[\frac{2^{-\sigma_0} \log 2}{1 - 2^{-2\sigma_0}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0} \log p_n}{1 - p_n^{-2\sigma_0}} \right]$$

$$= \frac{2^{-\sigma_0} \log 2}{1 + 2^{-\sigma_0}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0} \log p_n}{1 - p_n^{-\sigma_0}} = \frac{\log 2}{2^{\sigma_0} + 1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log p_n}{p_n^{\sigma_0} - 1}$$

oder, wenn ich mit $\frac{\log 2}{2^{\sigma_0} + 1}$ dividiere, die reelle Zahl

$$1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2^{\sigma_0} + 1) \log p_n}{(p_n^{\sigma_0} - 1) \log 2}$$

eine nicht positive bzw. eine positive Zahl ist.

Da $\lim_{\sigma_0 = D} r = 0$ ist, ist für alle hinreichend nahe an D gelegenen σ_0, d. h. für $D < \sigma_0 < \sigma'$, $C + r < 0$, während die Gleichung $\lim_{\sigma_0 = \infty} \frac{C}{r} = 0$ lehrt, daß für alle hinreichend großen σ_0, d. h. für $\sigma_0 > \sigma''$, $C + r > 0$ ist. Der Satz ist daher offenbar bewiesen, wenn ich nachgewiesen habe: Es ist die Funktion

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2^{\sigma_0} + 1) \log p_n}{(p_n^{\sigma_0} - 1) \log 2}$$

eine mit wachsendem $\sigma_0 > D$ stets abnehmende Funktion von σ_0, also speziell wenn ich nachgewiesen habe: Es nimmt bei jedem festen $n \geqq 2$ die Funktion

$$\frac{2^{\sigma_0} + 1}{p_n^{\sigma_0} - 1},$$

d. h. die Funktion

$$l_n(\sigma_0) = \log(2^{\sigma_0} + 1) - \log(p_n^{\sigma_0} - 1)$$

mit wachsendem $\sigma_0 > D$ stets ab, und daß dies letzte der Fall ist, ergibt sich unmittelbar daraus, daß für jedes $n \geqq 2$ und $\sigma_0 > D (> 1)$

$$l_n'(\sigma_0) = \frac{2^{\sigma_0} \log 2}{2^{\sigma_0} + 1} - \frac{p_n^{\sigma_0} \log p_n}{p_n^{\sigma_0} - 1} = \frac{\log 2}{1 + 2^{-\sigma_0}} - \frac{\log p_n}{1 - p_n^{-\sigma_0}} < \log 2 - \log p_n < 0$$

ist. Hiermit ist der obige Satz bewiesen.

Über Integralgleichungen mit positivem Kern.

Von Herrn *Robert Jentzsch* in Berlin.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß einige von den Herren *O. Perron**) und *G. Frobenius***) über Matrizen aus positiven Elementen aufgestellte Sätze ihr Analogon in der Theorie der Integralgleichungen finden. Die hier angewendeten Beweise sind im allgemeinen denen des Herrn *Frobenius* nachgebildet; einige Abweichungen liefern teils auch für die entsprechenden Matrizensätze Vereinfachungen, teils sind sie durch die Verschiedenheit der Aufgaben bedingt.

Das Hauptresultat dieser Arbeit lautet:

Ist die reelle Funktion $K(s,t)$, der Kern der linearen Integralgleichung zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

im Gebiete $a \leq s \leq b$; $a \leq t \leq b$ stetig und positiv, so besitzt dieser Kern Eigenwerte, und unter diesen gibt es einen, der reell, positiv, eine einfache Wurzel der Fredholmschen Funktion $D(\lambda)$ und absolut kleiner als jeder andere Eigenwert ist. Die zu diesem Eigenwert gehörige Eigenfunktion kann im Intervall $a \leq s \leq b$ positiv angenommen werden.

In § 1 wird eine Reihe bekannter Sätze vorausgeschickt, in § 2 und 3 der Hauptsatz bewiesen, in § 4 und § 5 werden Erweiterungen und Anwendungen gegeben.

---

*) *O. Perron*, a) Grundlagen für eine Theorie der *Jacobi*schen Kettenbruchalgorithmen; b) Zur Theorie der Matrices. Math. Ann. Bd. 64.

**) *G. Frobenius*, Über Matrizen aus positiven Elementen. I. und II. Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad., Berlin, 1908 und 1909.

§ 1.

Es sei die lineare Integralgleichung zweiter Art

$$(1.) \qquad f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

vorgelegt; gesucht wird also eine Funktion $\varphi(s)$, die im Intervall $a \leq s \leq b$ dieser Gleichung genügt; $f(s)$ und $K(s,t)$ sind als stetige, reelle Funktionen von s, bzw. s und t im Gebiete $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$ gegeben. Die *Fredholm*sche Theorie lehrt, daß es für einen bestimmten Kern $K(s,t)$, jedes $f(s)$ und einen bestimmten Wert des Parameters $\lambda = \lambda_0$ möglich ist, diese Gleichung zu lösen, außer wenn λ_0 eine gewisse ganze transzendente Funktion $D(\lambda)$ zum Verschwinden bringt. Ist aber $D(\lambda_0) = 0$, so gibt es Lösungen der Gleichung:

$$(2.) \qquad \varphi(s) = \lambda_0 \cdot \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Jede Lösung von (2.) heißt eine zum Eigenwert λ_0 gehörige Eigenfunktion des Kernes $K(s,t)$. Ist λ_0 eine n-fache Nullstelle von $D(\lambda)$, so gibt es im Fall des symmetrischen Kernes genau n linear unabhängige zu λ_0 gehörige Eigenfunktionen, die man nach Herrn *E. Schmidt* als normiert und orthogonalisiert annehmen kann. Bezeichnet man sie mit $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots \varphi_n(s)$, so gelten also die Gleichungen:

$$(3.) \qquad \varphi_\alpha(s) = \lambda_0 \int_a^b K(s,t)\,\varphi_\alpha(t)\,dt,$$

$$\int_a^b \varphi_\alpha^2(s)\,ds = 1, \qquad \int_a^b \varphi_\alpha(s)\,\varphi_\beta(s)\,ds = 0. \quad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots n;\ \alpha \neq \beta)$$

Ist jedoch $K(s,t)$ unsymmetrisch, $K(s,t) \neq K(t,s)$, so gibt es ein System von n und nicht mehr als n linear unabhängigen Funktionen $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s), \ldots \varphi_n(s)$, die Gleichungen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\alpha\nu}\,\varphi_\nu(s) = \lambda_0 \cdot \int_a^b K(s,t)\,\varphi_\alpha(t)\,dt \qquad (\alpha = 1,2,\ldots n)$$

genügen, wobei die Größen $a_{\alpha\nu}$ Konstanten bedeuten, deren Matrix $A = (a_{\alpha\nu})$ keine anderen charakteristischen Wurzeln besitzt als Eins. Ein solches System von Funktionen heißt ein invariantes System des Kernes $K(s,t)$, das zu dem Eigenwert λ_0 gehört, oder ein System von Hauptfunktionen des Kernes K für λ_0. Alle andern Systeme von *Hauptfunktionen* werden aus diesem durch eine lineare Transformation mit nicht verschwindender

Determinante erhalten. Durch Transformation der Matrix A auf die *Weierstraß*sche Normalform erhält man ein *kanonisches System**) *von Hauptfunktionen:*

$$\varphi_{11}, \varphi_{12}, \cdots \varphi_{1\varkappa};\ \varphi_{21}, \varphi_{22}, \cdots \varphi_{2\lambda};\ \cdots, \qquad (\varkappa + \lambda + \cdots = n)$$

die den Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned}
\varphi_{11}(s) &= \lambda_0 \cdot \int_a^b K(s,t)\,\varphi_{11}(t)\,dt,\\
\varphi_{12}(s) + \varphi_{11}(s) &= \lambda_0 \cdot \int_a^b K(s,t)\,\varphi_{12}(t)\,dt,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varphi_{1\varkappa}(s) + \varphi_{1,\varkappa-1}(s) &= \lambda_0 \cdot \int_a^b K(s,t)\,\varphi_{1,\varkappa}(t)\,dt,\\
\varphi_{21}(s) &= \lambda_0 \cdot \int_a^b K(s,t)\,\varphi_{21}(t)\,dt \quad \text{usw.}
\end{aligned} \tag{4.}$$

Wichtig ist nun für das Folgende, daß die beiden Kerne $K(s,t)$ und $K(t,s)$ dieselbe *Fredholm*sche Funktion $D(\lambda)$, also auch dieselben Eigenwerte in derselben Vielfachheit besitzen. Die Beziehung der beiden Kerne ist sogar eine noch engere, denn das zu λ_0 gehörige kanonische System von Hauptfunktionen des Kernes $K(t,s)$ zerfällt in derselben Weise wie das entsprechende von $K(s,t)$; d. h. es wird gebildet aus n Funktionen:

$$\psi_{11}, \psi_{12}, \cdots \psi_{1,\varkappa};\ \psi_{21}, \psi_{22}, \cdots \psi_{2\lambda};\cdots, \qquad (\varkappa + \lambda + \cdots = n)$$

die den Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned}
\psi_{11}(s) + \psi_{12}(s) &= \lambda_0 \cdot \int_a^b K(t,s)\,\psi_{11}(t)\,dt,\\
\psi_{12}(s) + \psi_{13}(s) &= \lambda_0 \cdot \int_a^b K(t,s)\,\psi_{12}(t)\,dt,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\psi_{1,\varkappa}(s) &= \lambda_0 \cdot \int_a^b K(t,s)\,\psi_{1,\varkappa}(t)\,dt \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Ferner aber sind die beiden Systeme φ und ψ *biorthogonal* zu wählen; d. h. es bestehen die Beziehungen

$$\int_a^b \varphi_{\alpha\beta}(s)\,\psi_{\gamma\delta}(s)\,ds = 0 \qquad (\alpha \neq \gamma \text{ oder } \beta \neq \delta) \tag{5.}$$

und

*) Diese Bezeichnung bei *H. Hahn*, Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen. Teil I. (Jahresber. d. D. Math.-Ver., 20, 1911) S. 22.

$$\int_a^b \varphi_{\alpha\beta}(s)\,\psi_{\alpha\beta}(s)\,ds = 1.$$

Sind φ und ψ schließlich zwei zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Hauptfunktionen von $K(s,t)$ bzw. $K(t,s)$, so sind sie auch orthogonal. —

Die bekannte *Fredholm*sche Funktion $D(\lambda; s, t)$ verschwindet für $\lambda = \lambda_0$ von kleinerer Ordnung als $D(\lambda)$. Ist dann

$$(6.) \qquad \frac{D(\lambda; s,t)}{D(\lambda)} = R(\lambda; s, t) = \frac{\chi_0(s,t)}{(\lambda-\lambda_0)^\nu} + \cdots$$

die Entwicklung von $R(\lambda; s, t)$ an der Stelle λ_0, so folgt aus der Formel*)

$$K(s,t)\,D(\lambda) - D(\lambda; s, t) + \lambda \int_a^b K(s,r)\,D(\lambda; r, t)\,dr = 0$$

durch Koeffizientenvergleichung:

$$\chi_0(s,t) = \lambda_0 \cdot \int_a^b K(s,r)\,\chi_0(r,t)\,dr.$$

Wird daher t irgendwie so fixiert $(t = t')$, daß $\chi_0(s,t')$ nicht identisch verschwindet, so wird $\chi_0(s,t')$ eine zu λ_0 gehörige Eigenfunktion von $K(s,t)$.

Ferner sei noch die Formel erwähnt

$$(7.) \qquad D(\lambda) = e^{-k_1\lambda - \frac{k_2}{2}\lambda^2 - \cdots},$$

die für alle λ gilt, die dem absoluten Betrage nach kleiner sind als der kleinste Eigenwert von λ. Hierbei ist gesetzt:

$$k_1 = \int_a^b K(s,s)\,ds, \quad k_2 = \int_a^b \int_a^b K(s,r)K(r,s)\,dr\,ds \quad \text{usw.}$$

Es besteht schließlich der Satz, daß $D(\lambda)$ höchstens das Geschlecht 2 (im *Laguerre*schen Sinne) besitzt, und das gilt auch, wenn $K(s,t)$ nur als beschränkt und integrierbar vorausgesetzt wird**).

§ 2.

Wir gehen nun zum Beweise des in der Einleitung genannten Satzes über und zeigen zunächst:

Jeder stetige, positive Kern besitzt einen positiven Eigenwert.

Es sei also $K(s,t) > 0$ im ganzen Gebiete $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$. Da $K(s,t)$ stetig ist, so folgt aus $K(s,t) > 0$, daß auch die untere Grenze

*) *Fredholm*, Acta Mathematica 27.

**) Vgl. zu § 1 durchgehends *H. Hahn*, a. a. O.

von $K(s,t)$ positiv ist, da sie ja wegen der Stetigkeit für ein dem Gebiete angehöriges Wertepaar der Argumente erreicht wird. Es sei etwa:

$$K(s,t) \geq m > 0.$$

Dann ist:

$$k_1 = \int_a^b K(s,s)\,ds \geq m(b-a),\ k_2 \geq m^2(b-a),\ k_3 \geq m^3(b-a) > 0.$$

Hätte nun $K(s,t)$ keinen Eigenwert, so würde die Gleichung (7.) des vorigen Paragraphen:

$$D(\lambda) = e^{-k_1\lambda - \frac{k_2}{2}\lambda^2 - \cdots}$$

für jedes λ zu Recht bestehen. $D(\lambda)$ ist aber eine ganze transzendente Funktion, deren Geschlecht höchstens 2 ist. Es wäre also:

$$k_3 = k_4 = \cdots = 0.$$

Nun ist aber k_3 positiv, sodaß sich ein Widerspruch ergibt*).

Die Reihe

$$k_1\lambda + \frac{k_2}{2}\lambda^2 + \frac{k_3}{3}\lambda^3 + \cdots$$

konvergiere etwa für $|\lambda| < R$, aber nicht für $|\lambda| > R$. Da alle Koeffizienten dieser Reihe positiv sind, so folgt nach einem bekannten Satze**) daß $\lambda_0 = R$ eine singuläre Stelle der durch die Reihe dargestellten Funktion ist. $\lambda_0 = R$ ist demnach ein positiver Eigenwert, und es befindet sich also unter den Eigenwerten vom kleinsten absoluten Betrage ein positiver.

§ 3.

Ebenso wie $D(\lambda)$ ist offenbar auch

$$R(\lambda; s,t) = K(s,t) + \lambda K^2(s,t) + \cdots + \lambda^\nu K^\nu(s,t) + \cdots$$

[$K^\nu(s,t)$ der ν-te iterierte Kern] für positive reelle Werte von λ, die kleiner sind als der absolute Betrag des kleinsten Eigenwertes, positiv. Nun befindet sich unter den absolut kleinsten Eigenwerten ein positiver λ_0. Lassen wir daher λ längs der Achse des Reellen wachsend an λ_0 heranrücken und bilden nach der Formel (6.) von § 1 den Grenzwert:

$$\lim_{\lambda=\lambda_0} (\lambda_0 - \lambda)^m R(\lambda; s,t) = \pm\, \chi_0(s,t),$$

so ist dieser und also auch die nicht identisch verschwindende Funktion

---

*) Vgl. *Tr. Lalesco*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, 145. p. 1136.

**) Vgl. *Hadamard*, la série de Taylor. p. 21, 22.

$\pm \chi_0(s,t)$ im ganzen Gebiet (a,b) positiv oder Null. Es ergibt sich also nach § 1, daß zu λ_0 mindestens eine nicht identisch verschwindende Eigenfunktion $\varphi_0(s)$ gehört, die im ganzen Intervall ≥ 0 und außerdem beschränkt ist. $\varphi_0(s)$ verschwindet aber nirgends, denn aus der Gleichung

$$\varphi_0(s) = \lambda_0 \cdot \int_a^b K(s,t)\,\varphi_0(t)\,dt$$

folgt zunächst, daß φ_0 stetig ist, und dann, daß

$$\varphi_0(s) \geq \lambda_0 \cdot m \cdot \int_a^b \varphi_0(t)\,dt > 0$$

ist.

Wir zeigen nun: *Der kleinste positive Eigenwert ist absolut kleiner als jeder andere Eigenwert und eine einfache Nullstelle von* $D(\lambda)$.

Hierbei beschränken wir uns zunächst auf *symmetrische* Kerne. Es sei $\varphi_0(s)$ die positive zu λ_0 gehörige Eigenfunktion von $K(s,t)$, die wir soeben erhalten haben. Wird nun ein vollständiges, normiertes und orthogonales System von Eigenfunktionen zugrunde gelegt, so ist φ_0 die *einzige positive* Eigenfunktion. Denn wäre $\varphi_a(s)$ eine zweite positive, so wäre:

$$\int_a^b \varphi_0(s)\,\varphi_a(s)\,ds > 0$$

(denn das Gleicheitszeichen ist wegen der Stetigkeit von φ_0 und φ_a ausgeschlossen), was der Gleichung:

$$\int_a^b \varphi_0(s)\,\varphi_a(s)\,ds = 0$$

widerspricht.

Daraus folgt, wenn λ ein Eigenwert des Kernes $K(s,t)$ ist, zu dem die Eigenfunktion $\varphi(s)$ gehört, $\varphi(s) \neq \varphi_0(s)$,

$$\varphi(s) = \lambda \cdot \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt,\ |\varphi(s)| < |\lambda| \int_a^b K(s,t)\,|\varphi(t)|\,dt^*).$$

Die Gleichheit ist hier ausgeschlossen, denn sie könnte (wegen der Stetigkeit der in Betracht kommenden Funktionen) nur eintreten, wenn $\varphi(t)$ stets vom selben Zeichen wäre; und da dessen Wahl beliebig ist, gelangten wir zu einer von $\varphi_0(s)$ verschiedenen, positiven Eigenfunktion von $K(s,t)$, was ausgeschlossen ist.

---

*) Vgl. *G. Frobenius*, a. a. O. II., S. 515.

Nun ist:

$$\int_a^b \varphi_0(s)\,|\varphi(s)|\,ds = \lambda_0 \cdot \int_a^b \int_a^b K(s,t)\,\varphi_0(t)\,|\varphi(s)|\,ds\,dt$$

$$= \lambda_0 \cdot \int_a^b \int_a^b K(t,s)\,\varphi_0(t)\,|\varphi(s)|\,ds\,dt$$

$$> \lambda_0 \cdot \frac{1}{|\lambda|} \int_a^b \varphi_0(t)\,|\varphi(t)|\,dt.$$

Da aber $\int_a^b \varphi_0(s)\,|\varphi(s)|\,ds > 0$ ist, folgt hieraus:

$$|\lambda| > \lambda_0$$

w. z. b. w; denn es ist gezeigt, daß jede von φ_0 verschiedene Eigenfunktion zu einem absolut größeren Eigenwert als λ_0 gehört, also auch, daß zu λ_0 nur eine Eigenfunktion (nämlich φ_0) gehört, daß demnach (§ 1.) λ_0 eine einfache Nullstelle von $D(\lambda)$ ist.

Etwas anders gestalten sich die Betrachtungen für den *unsymmetrischen* Kern. Hier seien $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ alle Eigenfunktionen der Kerne $K(s,t)$ und $K(t,s)$. φ_0 und ψ_0 seien die zu λ_0 gehörigen positiven Eigenfunktionen. Dann folgt wieder, wenn wir die beiden Systeme nach § 1 biorthogonal annehmen, wegen der Relationen

$$\int_a^b \varphi_0(s)\,\psi_\alpha(s)\,ds = 0, \qquad (\alpha > 0)$$

$$\int_a^b \psi_0(s)\,\varphi_\alpha(s)\,ds = 0, \qquad (\alpha > 0)$$

daß keine der Funktionen φ_α und ψ_α $(\alpha \neq 0)$ positiv sein kann. Da nun $K(s,t)$ und $K(t,s)$ dieselben Eigenwerte und für jeden Eigenwert dieselbe Anzahl von Eigenfunktionen besitzen, genügt es, für einen der Kerne nachzuweisen, daß jeder seiner Eigenwerte dem absoluten Betrage nach größer ist als der kleinste positive, um es für den anderen schließen zu können. Es sei etwa

$$\psi_1(s) = \lambda_1 \cdot \int_a^b K(t,s)\,\psi_1(t)\,dt.$$

Dann folgt wie vorhin

$$|\psi_1(s)| < |\lambda_1| \cdot \int_a^b K(t,s)\,|\psi_1(t)|\,dt,$$

wobei die Gleichheit ausgeschlossen ist, da wir, wie vorhin das Vorzeichen, hier einen konstanten Faktor $e^{i\vartheta}$ bei ψ_1 vernachlässigen können.

Nun ist:

$$\int_a^b \varphi_0(s)|\psi_1(s)|ds = \lambda_0 \cdot \int_a^b \int_a^b K(s,t)\varphi_0(t)|\psi_1(s)|ds\,dt$$
$$> \lambda_0 \cdot \frac{1}{|\lambda_1|}\int_a^b \varphi_0(t)|\psi_1(t)|dt.$$

Also folgt

$$|\lambda_1| > \lambda_0.$$

Damit ist aber nur gezeigt, daß zu dem kleinsten Eigenwert von $K(s,t)$, der hiernach positiv ist, nur eine *Eigenfunktion* gehört; um zu zeigen, daß λ_0 eine einfache Wurzel von $D(\lambda)$ ist, fehlt noch der Beweis, daß das zu λ_0 gehörige System von *Hauptfunktionen* aus dieser einzigen Eigenfunktion besteht. Dieser Beweis kann aber leicht geführt werden. Es sei ein kanonisches System von Hauptfunktionen, die zu λ_0 gehören, für $K(s,t)$ und $K(t,s)$ aufgestellt:

$$\varphi_{11}(s), \ldots \varphi_{1\nu}(s);$$
$$\psi_{11}(s), \ldots \psi_{1\nu}(s).$$

Dann ist φ_{11} eine Eigenfunktion von $K(s,t)$, und zwar die einzige zu λ_0 gehörige, die als positiv angenommen werden kann ($\varphi_{11} = \varphi_0$), und das Entsprechende gilt für $\psi_{1\nu}$. Aber nach den in § 1 aufgeführten Sätzen ist:

$$\int_a^b \varphi_{11}(s)\psi_{1\nu}(s)\,ds = 0, \text{ falls } \nu \neq 1;$$

φ_{11} und $\psi_{1\nu}$ haben aber positive untere Grenzen. Infolgedessen ist $\nu = 1$ *).

§ 4.

Sind $K_1(s,t)$ und $K_2(s,t)$ zwei positive, stetige Kerne, zwischen denen die Beziehung besteht $K_1(s,t) \geq K_2(s,t)$ für alle s, t des Gebietes, so ist offenbar auch $K_1^\nu(s,t) \geq K_2^\nu(s,t)$, und daraus folgt, wenn $\lambda_0^{(1)}$ und $\lambda_0^{(2)}$ die kleinsten positiven Eigenwerte von K_1 und K_2 bedeuten **):

$$\lambda_0^{(1)} \leq \lambda_0^{(2)}.$$

Denn die Koeffizienten der Reihe

$$K_1 + \lambda K_1^2 + \lambda^2 K_1^3 + \cdots$$

sind größer als die von

$$K_2 + \lambda K_2^2 + \lambda^2 K_2^3 + \cdots.$$

---

*) Ich verdanke diesen Schluß einer gütigen Mitteilung von Herrn *J. Schur*.

**) Vgl. *G. Frobenius*, a. a. O. II. S. 517.

Infolgedessen ist der Konvergenzradius der ersten Reihe kleiner, höchstens gleich dem der zweiten.

Für die zugehörigen Eigenfunktionen kann natürlich nichts Ähnliches gelten, da sie ja normiert sein sollen. —

Die Voraussetzung, daß $K(s,t)$ immer positiv sein soll, kann offenbar ein wenig eingeschränkt werden, da es an der Gültigkeit der angewandten Schlüsse nichts ändert, daß $K(s,t)$ an einzelnen Punkten des Gebietes oder auch in einer Menge von Punkten vom Inhalt Null verschwindet; es lassen sich leicht umfassendere Fälle angeben. Wenn man aber einen Kern hat, der für $t \geqq s$ verschwindet und sonst positiv ist, so gelten die Sätze jedenfalls nicht, da dieser Kern dem *Volterra*schen Typus angehört, also überhaupt keinen Eigenwert besitzt.

Ein Beispiel für positive Kerne bildet etwa

$$K(s,t) = \text{Minimum } (s,t)$$

im Intervall $0 \leqq s \leqq 1$; $0 \leqq t \leqq 1$; dieser Kern verschwindet nur für $s = 0$ und $t = 0$, also für 2 gerade Linien, deren Flächeninhalt Null ist. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen sind hier:

$$\frac{\pi^2}{4},\ 9\frac{\pi^2}{4},\ 25\frac{\pi^2}{4}, \ldots$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right),\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}s\right),\ \sin\left(\frac{5\pi}{2}s\right), \ldots .$$

Es gilt auch folgende Verallgemeinerung. $K(s,t)$ selbst sei stetig, aber nicht durchweg positiv, jedoch sei $K^n(s,t)$ immer positiv. Dann kann leicht geschlossen werden, daß der Satz, der für $K^{(n)}$ gilt, auch für K gilt.

Auch Verallgemeinerungen der Stetigkeits-Voraussetzungen liegen nahe; etwa der Fall, daß $K(s,t)$ nicht beschränkt ist, aber nur in der Weise unendlich wird, daß K^n, $K^{n+1}, \ldots$ sämtlich beschränkt bleiben, kann leicht behandelt werden*).

§ 5.

Einige merkwürdige Folgerungen lassen sich aus den vorstehenden Sätzen ziehen, wenn man sie mit den *Schmidt*schen Entwickelungssätzen kombiniert.

Ist zunächst $K(s,t)$ ein positiver, symmetrischer Kern, sind ferner

*) Vgl. *Fredholm*, a. a. O.

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \dots,$$
$$\lambda_1,\quad \lambda_2,\ \dots$$

seine normierten und orthogonalisierten Eigenfunktionen und Eigenwerte, die letzteren der Größe nach geordnet und jeder so oft geschrieben, wie es ihm nach seiner Vielfachheit zukommt, so ist:

$$K(s,t)=\frac{\varphi_1(s)\varphi_1(t)}{\lambda_1}+\frac{\varphi_2(s)\varphi_2(t)}{\lambda_2}+\dots,$$

falls diese Reihe gleichmäßig konvergiert.

Hierbei ist nun

$$\varphi_1(s)>0,\ \lambda_1>0,\ |\lambda_2|>\lambda_1.$$

Daraus folgt: Ist

$$a_1\varphi_1(s)\varphi_1(t)+a_2\varphi_2(s)\varphi_2(t)+\dots$$

eine in gleichem Grade konvergierende Reihe und sind $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ irgendwie gewählte orthogonale normierte Funktionen, so kann die Summe nur dann beständig positiv sein, wenn $a_1>0$ ist, $\varphi_1(s)>0$ ist und außerdem $|a_\nu|<a_1$ $(\nu=2,3,\dots)$. Denn bezeichnet man die Summe der Reihe mit $F(s,t)$, so ist in dem Falle $F(s,t)$ ein positiver Kern mit den zu $\frac{1}{a_a}$ gehörenden Eigenfunktionen φ_a.

So ist etwa $\varphi_1(s)\,\varphi_1(t)\pm\varphi_2(s)\,\varphi_2(t)$ nicht beständig vom gleichen Vorzeichen im Intervall $a\leq s\leq b$; $a\leq t\leq b$, sofern über φ_1 und φ_2 die Voraussetzungen gelten:

$$\int_a^b\varphi_1^2(s)\,ds=1,\quad \int_a^b\varphi_2^2(s)\,ds=1,\quad \int_a^b\varphi_1(s)\,\varphi_2(s)\,ds=0.$$

Dies kann allerdings noch leicht direkt bewiesen werden, doch dürfte bei dem entsprechenden dreigliedrigen Ausdruck der Nachweis ohne die hier angewandten Hilfsmittel schon schwierig sein.

Ähnliche Betrachtungen lassen sich anstellen im Falle des unsymmetrischen Kernes, wenn man $K(s,t)$ nach den Eigenfunktionen der beiden gleichfalls positiven, symmetrischen Kerne

$$K_1(s,t)=\int_a^b K(s,r)\,K(t,r)\,dr,$$
$$K_2(s,t)=\int_a^b K(r,s)\,K(r,t)\,dr$$

entwickelt, wie dies nach Herrn *E. Schmidt* möglich ist.

Über die Zerlegung der kommutativen Gruppen in zyklische teilerfremde Faktoren.

Von Herrn *R. Remak* in Berlin.

In ihrer Arbeit*) „Über Gruppen vertauschbarer Elemente“ haben die Herren *Frobenius* und *Stickelberger* gezeigt, daß jede kommutative Gruppe als das (direkte) Produkt von teilerfremden zyklischen Untergruppen von Primzahlpotenzordnung darstellbar ist und daß die Ordnungen der Faktoren zweier verschiedener Zerlegungen derselben kommutativen Gruppe, von der Reihenfolge abgesehen, übereinstimmen. Für beide Teile dieses Satzes will ich neue Beweise liefern, die in engerem Zusammenhange stehen als die vorhandenen Beweise beider Teile.

Zunächst läßt sich leicht zeigen, daß jede kommutative Gruppe auf eine und nur eine Weise als das Produkt von (teilerfremden) Untergruppen mit teilerfremden Primzahlpotenzordnungen darstellbar ist. Das will ich hier als bekannt voraussetzen und deshalb den Satz nur beweisen für kommutative Gruppen von Primzahlpotenzordnung.

Es sei zunächst speziell $\mathfrak{C}$ eine kommutative Gruppe von der Primzahlpotenzordnung p^r, deren sämtliche Elemente außer dem Einheitselement E die Ordnung p besitzen. Man greife irgend ein Element A_1, das von E verschieden ist, heraus und bilde die zyklische Gruppe $\mathfrak{A}_1$ aller Potenzen von A_1, deren Ordnung p sein muß. Es sei A_2 in $\mathfrak{C}$, aber nicht in $\mathfrak{A}_1$ enthalten, $\mathfrak{A}_2$ die zyklische Gruppe der Potenzen von A_2. Die Ordnung von $\mathfrak{A}_2$ ist ebenfalls p. Dann sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ teilerfremd,

*) Dieses Journal Bd. 86, S. 217. Vgl. auch *Heinrich Weber*, Lehrbuch der Algebra II, § 11 u. 12, S. 38—49.

weil sie sonst identisch wären und A_2 in $\mathfrak{A}_1$ enthalten. Man bilde $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$. Es sei A_3 in $\mathfrak{C}$, aber nicht in $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ enthalten, $\mathfrak{A}_3$ die zyklische Gruppe der Potenzen von A_3, deren Ordnung wieder p. Dann ist $\mathfrak{A}_3$ zu $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ teilerfremd, weil sonst $\mathfrak{A}_3$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, also A_3 ein Element von $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ wäre. So kann man fortfahren, bis die Elemente von $\mathfrak{C}$ erschöpft sind. Das tritt ein, wenn die Zahl der Faktoren gleich γ ist:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_\gamma .$$

Der Satz von der Eindeutigkeit der Ordnungen der Faktoren ist evident. Es sind immer γ Faktoren von der Ordnung p.

Es sei jetzt $\mathfrak{C}$ eine beliebige kommutative Gruppe von der Primzahlpotenzordnung p^r. Die Untergruppe derjenigen Elemente, deren Ordnung in p^ϱ aufgeht, sei $\mathfrak{C}_\varrho$. Ist p^α die höchste vorkommende Ordnung eines Elementes in $\mathfrak{C}$, so ist $\mathfrak{C}_\alpha = \mathfrak{C}$. Ferner ist $\mathfrak{C}_0 = E$. In der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_{\alpha-1}}$, deren Ordnung p^{r_α} sei, besitzen alle Komplexe außer dem Einheitskomplex die Ordnung p. Man zerlege sie in ν_α teilerfremde zyklische Faktoren und bilde eine Basis, indem man aus jedem Faktor einen vom Einheitskomplex verschiedenen Komplex wählt. Aus jedem Komplexe der Basis greife man ein beliebiges Element heraus. Man erhält so ein System von ν_α Elementen,

$$A_1, A_2, \ldots A_{\nu_\alpha},$$

deren Ordnung p^α sein muß, da alle Elemente, deren Ordnung kleiner als p^α ist, im Einheitskomplex enthalten sind. Man bilde die zyklischen Gruppen ihrer Potenzen, deren Ordnungen alle gleich p^α sind:

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_{\nu_\alpha}.$$

Ich behaupte nun, daß das Produkt

$$\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_{\nu_\alpha}$$

ein direktes Produkt ist. Angenommen, das sei nicht der Fall, so existiert eine Relation von der Form

$$A_1^{a_1} \cdot A_2^{a_2} \cdots A_{\nu_\alpha}^{a_{\nu_\alpha}} = E, \tag{1.}$$

in der nicht alle Exponenten durch p^α teilbar sind. Es sei p^β die höchste Potenz von p, die in allen Exponenten $a_1, a_2, \ldots a_{\nu_\alpha}$ aufgeht. Man kann also die Relation (1.) schreiben

$$A_1^{p^\beta \cdot b_1} \cdot A_2^{p^\beta \cdot b_2} \cdots A_{\nu_\alpha}^{p^\beta \cdot b_{\nu_\alpha}} = E. \tag{2.}$$

Man setze

$$A_1^{b_1} \cdot A_2^{b_2} \cdots A_{r_\alpha}^{b_{r_\alpha}} = C_{\alpha-1}, \tag{3.}$$

dann lautet die Gleichung (2.)

$$C_{\alpha-1}^{p^\beta} = E.$$

Da aber $\beta \leqq \alpha - 1$, so ist $C_{\alpha-1}$ ein Element von $\mathfrak{C}_{\alpha-1}$. In der Gleichung (3.) sind nicht alle Exponenten durch p teilbar, weil sonst p^β nicht der größte gemeinsame Teiler der $a_1, a_2, \ldots a_{r_\alpha}$ wäre; also ist mindestens einer der Faktoren der linken Seite von der Ordnung p^α. Geht man durch Multiplikation mit $\mathfrak{C}_{\alpha-1}$ zu einer Gleichung zwischen den Komplexen der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_{\alpha-1}}$ über:

$$A_1^{b_1}\mathfrak{C}_{\alpha-1} \cdot A_2^{b_2}\mathfrak{C}_{\alpha-1} \ldots A_{r_\alpha}^{b_{r_\alpha}}\mathfrak{C}_{\alpha-1} = C_{\alpha-1}\mathfrak{C}_{\alpha-1} = \mathfrak{C}_{\alpha-1},$$

so stehen in dieser Gleichung auf der linken Seite sicher nicht lauter Einheitskomplexe. Eine solche Gleichung widerspricht aber der Voraussetzung, daß die Komplexe

$$A_1\mathfrak{C}_{\alpha-1}, A_2\mathfrak{C}_{\alpha-1}, \ldots A_{r_\alpha}\mathfrak{C}_{\alpha-1}$$

eine Basis der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_{\alpha-1}}$ sein sollen. Es kann deshalb die Gleichung (1.) nicht bestehen, wenn nicht sämtliche Faktoren der linken Seite einzeln gleich E sind. Also ist

$$\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_{r_\alpha}$$

ein direktes Produkt.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{A}_{\lambda,\,\alpha-1}$ die Untergruppe derjenigen Elemente von $\mathfrak{A}_\lambda$, die der Bedingung

$$A_\lambda^{p^{\alpha-1}} = E$$

genügen, ferner mit $\mathfrak{D}_{\alpha-1}$ den Durchschnitt der beiden Gruppen

$$\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_{r_\alpha} \text{ und } \mathfrak{C}_{\alpha-1},$$

so ist

$$\mathfrak{A}_{1,\,\alpha-1} \times \mathfrak{A}_{2,\,\alpha-1} \times \cdots \times \mathfrak{A}_{r_\alpha,\,\alpha-1} \leqq \mathfrak{D}_{\alpha-1}. \tag{4.}$$

Stellt man irgend ein Element von $\mathfrak{D}_{\alpha-1}$ als Produkt von Elementen von

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_{r_\alpha}$$

dar, so kann deren Ordnung höchstens $p^{\alpha-1}$ sein, es sind also Elemente von

$$\mathfrak{A}_{1,\,\alpha-1}, \mathfrak{A}_{2,\,\alpha-1}, \ldots \mathfrak{A}_{r_\alpha,\,\alpha-1}.$$

$$\mathfrak{D}_{\alpha-1} \leqq \mathfrak{A}_{1,\,\alpha-1} \times \mathfrak{A}_{2,\,\alpha-1} \times \cdots \times \mathfrak{A}_{r_\alpha,\,\alpha-1}. \tag{5.}$$

Es ist also

$$(6.) \qquad \mathfrak{D}_{\alpha-1} = \mathfrak{A}_{1,\alpha-1} \times \mathfrak{A}_{2,\alpha-1} \times \cdots \times \mathfrak{A}_{\nu_\alpha,\alpha-1}.$$

Man gehe durch Multiplikation mit $\mathfrak{C}_{\alpha-2}$ zur Faktorgruppe über:

$$(7.) \qquad \frac{\mathfrak{D}_{\alpha-1}\cdot\mathfrak{C}_{\alpha-2}}{\mathfrak{C}_{\alpha-2}} = \frac{\mathfrak{A}_{1,\alpha-1}\cdot\mathfrak{C}_{\alpha-2}}{\mathfrak{C}_{\alpha-2}} \times \frac{\mathfrak{A}_{2,\alpha-1}\cdot\mathfrak{C}_{\alpha-2}}{\mathfrak{C}_{\alpha-2}} \times \cdots \times \frac{\mathfrak{A}_{\nu_\alpha,\alpha-1}\cdot\mathfrak{C}_{\alpha-2}}{\mathfrak{C}_{\alpha-2}}.$$

Angenommen, dies Produkt wäre kein direktes, so bestünde eine Relation

$$\mathfrak{C}_{\alpha-2} = A_{1,\alpha-1}\mathfrak{C}_{\alpha-2}\cdot A_{2,\alpha-1}\mathfrak{C}_{\alpha-2}\cdots A_{\nu_\alpha,\alpha-1}\mathfrak{C}_{\alpha-2},$$

wo $A_{\lambda,\alpha-1}$ ein Element von $\mathfrak{A}_{\lambda,\alpha-1}$ bedeutet und nicht alle $A_{\lambda,\alpha-1}$ eine Ordnung kleiner oder gleich $p^{\alpha-2}$ haben. Speziell wäre also

$$C_{\alpha-2} = A_{1,\alpha-1}\cdot A_{2,\alpha-1}\cdots A_{\nu_\alpha,\alpha-1},$$

wo $C_{\alpha-2}$ ein Element von $\mathfrak{C}_{\alpha-2}$ bedeutet, also eine Ordnung kleiner oder gleich $p^{\alpha-2}$ besitzt. Die Ordnung der rechten Seite ist aber $p^{\alpha-1}$. Man erhält somit einen Widerspruch. Also ist in (7.) $\frac{\mathfrak{D}_{\alpha-1}\cdot\mathfrak{C}_{\alpha-2}}{\mathfrak{C}_{\alpha-2}}$ in ein direktes Produkt zerlegt. Man behandele nun $\mathfrak{C}_{\alpha-1}$ ganz ebenso wie $\mathfrak{C}_\alpha$; bei der Zerlegung von $\frac{\mathfrak{C}_{\alpha-1}}{\mathfrak{C}_{\alpha-2}}$ in direkte Faktoren benutze man aber die Zerlegung (7.) von $\frac{\mathfrak{D}_{\alpha-1}\cdot\mathfrak{C}_{\alpha-2}}{\mathfrak{C}_{\alpha-2}}$; bei der Auswahl der Basiselemente aus den Komplexen wähle man

$$A_1^p, A_2^p, \ldots A_{\nu_\alpha}^p, A_{\nu_\alpha+1}, A_{\nu_\alpha+2}, \cdots A_{\nu_{\alpha-1}}.$$

Dasselbe Verfahren wende man auf $\mathfrak{C}_{\alpha-2}, \ldots \mathfrak{C}_1$ an. Da $\mathfrak{C}_0 = E$, so ist $\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_0} = \mathfrak{C}_1$. Es wird also $\mathfrak{C}_1$ selber in direkte Faktoren sämtlich von der Ordnung p zerlegt. Die Ordnung von $\frac{\mathfrak{C}_\varrho}{\mathfrak{C}_{\varrho-1}}$ sei p^{ν_ϱ}. Ich bilde jetzt das Produkt

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}' = (\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_{\nu_\alpha}) &\cdot (\mathfrak{A}_{\nu_\alpha+1} \times \mathfrak{A}_{\nu_\alpha+2} \times \cdots \times \mathfrak{A}_{\nu_{\alpha-1}}) \\ &\cdot (\mathfrak{A}_{\nu_{\alpha-1}+1} \times \mathfrak{A}_{\nu_{\alpha-1}+2} \times \cdots \times \mathfrak{A}_{\nu_{\alpha-2}}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdot (\mathfrak{A}_{\nu_2+1} \times \mathfrak{A}_{\nu_2+2} \times \cdots \times \mathfrak{A}_{\nu_1}).\end{aligned}$$

Es haben also ν_ϱ Faktoren eine Ordnung größer oder gleich p^ϱ, $\nu_\varrho - \nu_{\varrho+1}$ Faktoren genau die Ordnung p^ϱ.

Ich will erstens zeigen, daß $\mathfrak{C}'$ ein direktes Produkt, zweitens, daß $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}$ ist.

Angenommen, $\mathfrak{C}'$ sei kein direktes Produkt, so gibt es eine Relation von der Form

$$A_1^{a_1} \cdot A_2^{a_2} \cdots A_{\nu_1}^{a_{\nu_1}} = E,$$

in der nicht alle Faktoren links gleich E sind. Es sei p^β die höchste vorkommende Ordnung eines Faktors der linken Seite. Es ist

$$A_1^{a_1 \cdot p^{\beta-1}} \cdot A_2^{a_2 \cdot p^{\beta-1}} \cdots A_{\nu_1}^{a_{\nu_1} \cdot p^{\beta-1}} = E. \tag{8.}$$

Die Ordnung von

$$A_1^{a_\lambda \cdot p^{\beta-1}}$$

ist 1 oder p, je nachdem die Ordnung von $A_\lambda^{a_\lambda}$ gleich p^β oder kleiner als p^β war. In der Gleichung (8.) sind also alle Elemente links in $\mathfrak{C}_1$ enthalten und nicht alle gleich E. Das widerspricht aber der schon bewiesenen direkten Zerlegung von $\mathfrak{C}_1$. Also muß auch $\mathfrak{C}'$ ein direktes Produkt sein. Es sei die Ordnung von $\mathfrak{C}_\varrho$ gleich p^{γ_ϱ}. Also ist speziell

$$\gamma_a = \gamma, \quad \gamma_0 = 0.$$

Es ergibt sich

$$\gamma_\varrho - \gamma_{\varrho-1} = \nu_\varrho.$$

Die Ordnung von $\mathfrak{C}'$ ist

$$(p^a)^{\nu_a} \cdot (p^{a-1})^{\nu_{a-1}-\nu_a} \cdot (p^{a-2})^{\nu_{a-2}-\nu_{a-1}} \cdots (p^\varrho)^{\nu_\varrho - \nu_{\varrho+1}} \cdots p^{\nu_1 - \nu_2} = p^{\sum_{\varrho=1}^{a} \varrho(\nu_\varrho - \nu_{\varrho+1})}.$$

Hierin ist $\nu_{a+1} = 0$ zu denken. Es ist aber

$$\sum_{\varrho=1}^{a} \varrho(\nu_\varrho - \nu_{\varrho+1}) = \sum_{\varrho=1}^{a} \nu_\varrho = \sum_{\varrho=1}^{a} (\gamma_\varrho - \gamma_{\varrho-1}) = \gamma_a = \gamma.$$

Also ist p^γ die Ordnung von $\mathfrak{C}'$. Es war

$$\mathfrak{C}' \leqq \mathfrak{C}.$$

Also ist

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}$$

oder

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_{\nu_1}.$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Es sei nun

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_{\mu_a} \\ \times \mathfrak{B}_{\mu_a+1} \times \cdots \times \mathfrak{B}_{\mu_{a-1}} \times \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \times \mathfrak{B}_{\mu_{\varrho+1}} \\ \times \mathfrak{B}_{\mu_{\varrho+1}+1} \times \cdots \times \mathfrak{B}_{\mu_\varrho} \\ \times \mathfrak{B}_{\mu_\varrho+1} \times \cdots \times \mathfrak{B}_{\mu_{\varrho-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \times \mathfrak{B}_{\mu_1}\end{aligned}$$

irgend eine Zerlegung von $\mathfrak{C}$ in teilerfremde zyklische Faktoren, deren Ordnungen von $\mathfrak{B}_{\mu_{\varrho+1}+1}$ bis $\mathfrak{B}_{\mu_\varrho}$ einschließlich gleich p^ϱ seien. Ich will zeigen, daß

$$\mu_\varrho = \nu_\varrho \text{ für } \varrho = 1, 2, \dots \alpha.$$

Aus entsprechenden Gründen wie die Beziehungen (4.), (5.), (6.) gelten die Beziehungen

$$(9.) \qquad \mathfrak{B}_{1,\varrho} \times \mathfrak{B}_{2,\varrho} \times \cdots \times \mathfrak{B}_{\mu_1,\varrho} \leqq \mathfrak{C}_\varrho,$$

$$(10.) \qquad \mathfrak{C}_\varrho \leqq \mathfrak{B}_{1,\varrho} \times \mathfrak{B}_{2,\varrho} \times \cdots \times \mathfrak{B}_{\mu_1,\varrho},$$

folglich

$$(11.) \qquad \mathfrak{C}_\varrho = \mathfrak{B}_{1,\varrho} \times \mathfrak{B}_{2,\varrho} \times \cdots \times \mathfrak{B}_{\mu_1,\varrho}.$$

Es ist aber

$$\mathfrak{B}_{\lambda,\varrho} = \mathfrak{B}_\lambda,$$

sowie die Ordnung von $\mathfrak{B}_\lambda$ kleiner oder gleich p^ϱ ist. Also ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_\varrho = \mathfrak{B}_{1,\varrho} \times \mathfrak{B}_{2,\varrho} \times \cdots \times \mathfrak{B}_{\mu_{\varrho+1},\varrho} \\ \times \mathfrak{B}_{\mu_{\varrho+1}+1} \times \cdots \times \mathfrak{B}_{\mu_\varrho} \\ \times \mathfrak{B}_{\mu_\varrho+1} \times \cdots \times \mathfrak{B}_{\mu_1}.\end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit $\mathfrak{C}_{\varrho-1}$ gehe man beiderseits zur Faktorgruppe nach $\mathfrak{C}_{\varrho-1}$ über. Die Faktoren von $\mathfrak{C}_\varrho$, deren Ordnung kleiner oder gleich $p^{\varrho-1}$, liefern nur den Einheitskomplex, die übrigen vom Einheitskomplex verschiedene Faktorgruppen. Es ist also

$$(12.) \qquad \begin{aligned}\frac{\mathfrak{C}_\varrho}{\mathfrak{C}_{\varrho-1}} = \frac{\mathfrak{B}_{1,\varrho} \cdot \mathfrak{C}_{\varrho-1}}{\mathfrak{C}_{\varrho-1}} \times \frac{\mathfrak{B}_{2,\varrho} \cdot \mathfrak{C}_{\varrho-1}}{\mathfrak{C}_{\varrho-1}} \times \cdots \times \frac{\mathfrak{B}_{\mu_{\varrho+1},\varrho} \cdot \mathfrak{C}_{\varrho-1}}{\mathfrak{C}_{\varrho-1}} \\ \times \frac{\mathfrak{B}_{\mu_{\varrho+1}+1} \cdot \mathfrak{C}_{\varrho-1}}{\mathfrak{C}_{\varrho-1}} \times \cdots \times \frac{\mathfrak{B}_{\mu_\varrho} \cdot \mathfrak{C}_{\varrho-1}}{\mathfrak{C}_{\varrho-1}}.\end{aligned}$$

Daß (12.) eine direkte Zerlegung der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{C}_\varrho}{\mathfrak{C}_{\varrho-1}}$, wird ebenso bewiesen wie für (7.). Die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{C}_\varrho}{\mathfrak{C}_{\varrho-1}}$ hängt nicht von der Zerlegung von $\mathfrak{C}$ in Faktoren ab; sie hatte die Ordnung p^{ν_ϱ}, jeder ihrer Komplexe hatte die Ordnung p; für sie gilt also bereits der Satz von der Eindeutigkeit der Ordnungen der Faktoren. Also ist deren Anzahl ν_ϱ. In (12.) stehen aber rechts μ_ϱ Faktoren. Also ist

$$\mu_\varrho = \nu_\varrho.$$

Es gibt also ν_ϱ Faktoren $\mathfrak{B}_\lambda$, deren Ordnung größer oder gleich p^ϱ, $\nu_\varrho - \nu_{\varrho+1}$ Faktoren $\mathfrak{B}_\lambda$, deren Ordnung genau gleich p^ϱ ist. Die Anzahl der Faktoren, deren Ordnung p^ϱ ist, stimmt also in allen Zerlegungen überein, was zu beweisen war.

Stabile Anordnungen von Elektronen im Atom*).

Von Herrn *L. Föppl* in Göttingen.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit, zu der ich die Anregung Herrn Geheimrat *Hilbert* verdanke, behandelt die Gleichgewichtsanordnungen von Elektronen und untersucht diese Anordnungen auf Stabilität. Für das Atommodell sind die einfachsten Annahmen gemacht: Es soll nämlich Kugelgestalt besitzen und die positive Elektrizität soll räumlich und homogen über die ganze Kugel verteilt sein, während sich negative Elektronen in dieser Kugel reibungslos bewegen können. Dabei wird von vorneherein angenommen, daß alle Elektronen im Atom dieselbe träge Masse m sowie die gleiche negative Ladung, das Elementarquantum, besitzen, das wir fortan gleich der Einheit setzen wollen. Im allgemeinen wird man wohl annehmen können, daß bei einem elektrisch indifferenten Atom die Anzahl ν der Einheiten der positiven Elektrizitätsmenge des Atoms gleich ist der Anzahl n der im Atom enthaltenen Elektronen. Da es jedoch für die Stabilitätsuntersuchung keine Erschwerung bedeutet, so soll ν immer mitgeführt werden, sodaß also, wenn man unter b den Radius der positiv geladenen Kugel, unter a den Abstand des Elektrons vom Kugelmittelpunkt versteht, nach einem bekannten Satz der Potentialtheorie die Anziehungskraft K, die das Elektron nach dem Mittelpunkt der Kugel hin erfährt,

$$K = \frac{\nu}{b^3}\, a$$

ist. Da die Elektronen sich gegenseitig umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung abstoßen sollen, so wird eine gegebene Anzahl n von Elektronen unter der Wirkung dieser beiden Kräfte eine Gleichgewichtslage aufsuchen, deren Stabilität hier untersucht werden soll. Dabei ist stets vorausgesetzt, daß die Stärke der positiven Ladung des Atoms so groß ist, daß im Falle des Gleichgewichts alle n Elektronen innerhalb der

*) Auszug aus der Dissertation des Verf. (Göttingen, 1912).

Kugel sich befinden. Für $\nu = n$ ist diese Bedingung in den Fällen, die wir hier untersuchen, jedesmal erfüllt. Denken wir uns die stabile Anordnung von n Elektronen im Atom von der gesamten positiven Ladung $\nu = n$ gefunden und nun die positive Ladung der Kugel abnehmend. Diese Abnahme kann nur sprungweise vor sich gehen; denn wegen des Parallelismus zwischen positiver und negativer Elektrizität müssen wir auch von der positiven Elektrizität, über deren Konstitution wir bisher noch sehr wenig wissen, annehmen, daß sie entsprechend den Elektronen in unveränderlichen Elementarquanten zusammenhält. Bei dieser sprungweisen Abnahme der positiven Ladung der Kugel, wobei wir uns jedesmal wieder die übrigbleibende positive Ladung über die Kugel vom Radius b räumlich und homogen verteilt denken, werden natürlich die n Elektronen wegen der verminderten Anziehung nach dem Kugelmittelpunkt mehr und mehr nach außen rücken. Dabei wird das ganze System nach außen hin als negativ geladenes Atom erscheinen und die Neigung haben, positive Ladungen aufzunehmen oder Elektronen auszustoßen. Da die Stabilität, wie sich zeigen wird, unabhängig von ν ist, so bleibt das System so lange stabil, bis ein oder mehrere Elektronen aus der Kugel austreten. Alsdann wird in den meisten Fällen Labilität eintreten, indem nämlich ein oder mehrere Elektronen ins Unendliche abgestoßen werden, während der Rest wieder innerhalb der Kugel eine stabile Anordnung findet. Wie aus diesen Andeutungen hervorgeht, lassen sich somit leicht mittels $\nu \leqslant n$ positiv und negativ elektrisch geladene Atome deuten.

Die besprochenen Annahmen über das Atom hat *J. J. Thomson* seiner Arbeit: On the structure of the atom (Phil. Mag., 6. ser., vol. 7. 1904) zugrundegelegt*). Sie bildet den Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchungen und ich will deshalb kurz darauf eingehen. Schon vor *Thomson* hat *W. Voigt***) auf die Bedeutung dieses Atommodelles für die Erklärung optischer Erscheinungen im Sinn der Elektronentheorie hingewiesen. Der Hauptunterschied zwischen *Thomsons* und der vorliegenden Arbeit besteht

*) Vom gleichen Verfasser rühren zwei in der Sammlung „Die Wissenschaft“ (Vieweg & Sohn) Heft 3 u. 25 erschienene Schriften über Elektronentheorie her, wo *J. J. Thomson* in leicht verständlicher und anregender Weise die Bedeutung dieser Theorie für die Entwicklung der Wissenschaft weiteren Kreisen klarzumachen versucht.

**) *W. Voigt*, Beiträge zur Elektronentheorie des Lichtes, Annalen der Physik, Vierte Folge, Bd. 6, S. 491.

darin, daß *J. J. Thomson* von vorneherein allen Elektronen im Atom Rotation um eine bestimmte Achse erteilt, während wir zuerst von Rotation der Elektronen ganz absehen, vielmehr die stabilen Gleichgewichtslagen der Ruhe für die verschiedenen Anzahlen n von Elektronen suchen. Dabei werden wir die Stabilität für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Elektronen finden und weit genug in der Zahlenreihe fortschreiten, bis wir eine gewisse Gesetzmäßigkeit für die stabilen Anordnungen erkennen, auf Grund deren wir dann für beliebig große Zahlen n die wahrscheinlich stabile Lage der n Elektronen angeben können; nachträglich läßt sich alsdann ungezwungen eine Rotation der Elektronen, die zur Erklärung vieler Erscheinungen nötig ist, hinzunehmen, ohne daß sich das Charakteristische der Anordnung der Ruhe ändert. Ich glaube, daß wir auf diese Weise ein viel besseres Bild von der Anordnung der Elektronen bekommen als *J. J. Thomson*. Dafür erfordert unsere Darstellung aber auch einen weit größeren Aufwand an Rechenarbeit; denn die Annahme der Rotation bei *J. J. Thomson* ist nicht, wie es auf den ersten Blick scheinen möchte, eine Erschwerung der Aufgabe, sondern im Gegenteil eine Erleichterung, indem nämlich *J. J. Thomson* die Rotation so groß annimmt, daß die Elektronen infolge der Zentrifugalkraft in einer Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel bleiben. Nachträglich läßt er wohl zu, daß sich einzelne Systeme von Elektronen in parallelen Ebenen anordnen, ohne es jedoch rechnerisch zu verfolgen. Durch die Rotation, die er bei seinen Rechnungen annimmt, reduziert er das Stabilitätsproblem auf ein ebenes, was natürlich eine wesentliche Vereinfachung bedeutet. Streng mathematisch führt *J. J. Thomson* nur den Fall durch, daß n Elektronen in gleichen Abständen auf dem Umfang eines Kreises liegen, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Kugel übereinstimmt. Dieser Elektronenring rotiert um die Achse senkrecht zu seiner Ebene. *J. J. Thomson* kommt zu dem interessanten Resultat, daß der Elektronenring bloß bis $n = 5$ durch genügend starke Rotation stabil erhalten werden kann. Bei $n = 6$ ist der einfache Ring für jede noch so große Rotation labil und wird erst wieder durch ein Elektron im Mittelpunkt der Kugel stabil gemacht. *Thomson* stellt sich nun die Frage, wieviel Elektronen im Innern eines Ringes von m Elektronen nötig sind, um ihn stabil zu machen. Da sich die Elektronen innerhalb des Ringes natürlich auch abstoßen und Ringe bilden, so kommt *Thomson* zu einer

Anordnung nach konzentrischen Ringen. Diese Gruppierung der Elektronen im Atom, sowie manche daraus ableitbare Eigenschaften des Atommodells zeigen gewisse Ähnlichkeit mit dem periodischen System der Elemente.

Immerhin darf nicht übersehen werden, daß *Thomson* bei seiner Rechnung gewisse Vernachlässigungen macht, die auf die Anordnung der Elektronen von Bedeutung sein müssen. Vor allen Dingen habe ich da die Annahme *Thomsons* im Auge, daß die inneren Ringe in ihrer Einwirkung auf den äußeren einfach durch eine Ladung im Mittelpunkt der Kugel ersetzt werden, deren Stärke gleich der Summe der Einzelladungen der inneren Elektronen ist. Durch diese Vernachlässigung erhält er Ringanordnungen, die unmöglich im Gleichgewicht bestehen können, solange keine Reibung angenommen wird. *Thomsons* Resultate sind daher als eine erste Näherung anzusehen, die noch keineswegs vollkommen befriedigen kann, obwohl sie als erster Ansatz für weitere Untersuchungen in dieser Richtung die Grundlage bilden.

Durch Vermeidung der von *J. J. Thomson* eingeführten Vernachlässigungen glaube ich, mit der vorliegenden Arbeit die Frage nach dem Bau der Atome gefördert zu haben.

Ich schicke folgenden Hilfssatz voran:

Hilfssatz: Das gesamte Newtonsche Potential

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum_1^n{}^s \sum_1^n{}^p \frac{1}{r_{sp}}$$

— dabei bedeute r_{sp} die Enfernung zwischen Elektron s und Elektron p — *einer Gleichgewichtslage von n Elektronen in der positiv geladenen Kugel ist das Doppelte des quadratischen Potentials* $U_1 = \frac{\nu}{2b^3} \sum_1^n{}^\varkappa a_\varkappa^2$ *dieser Anordnung.* Dabei bedeutet $a_\varkappa$ den Abstand des $\varkappa$-ten Elektrons vom Kugelmittelpunkt; ferner ist b — wie schon in der Einleitung erwähnt — der Radius der positiven Kugel und ν die Anzahl der positiven Einheitsladungen der Kugel. (Beweis siehe Diss. S. 11.)

§ 1. Allgemeine Stabilitätsuntersuchung eines Elektronenringes.

Es gibt bekanntlich zwei verschiedene Methoden, eine Anordnung auf Stabilität zu prüfen, nämlich einerseits die Methode der kleinen Schwingungen, andererseits die Minimumsbedingung des Potentials. Bezüglich der Gleichwertigkeit beider Methoden siehe Diss. S. 8. Wir werden hier wie im

folgenden die Methode der kleinen Schwingungen anwenden. Wir denken uns n Elektronen in gleichen Abständen auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der positiv geladenen Kugel ist. Es ist immer eine solche Gleichgewichtsanordnung möglich. Ist a der Radius des Kreises, so bestimmt er sich bei gegebener Anzahl n von Elektronen aus der folgenden Gleichgewichtsbedingung für Elektron 0 (s. Fig. 1).

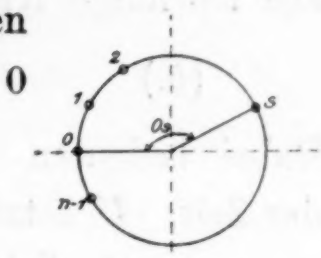


Fig. 1.

$$(1.) \qquad \frac{\nu}{b^3}\, a = \sum_1^{n-1 s} \frac{1}{4\,a^2 \sin\frac{\theta_s}{2}} = \frac{1}{4a^2} \sum_1^{n-1 s} \frac{1}{\sin\frac{\theta_s}{2}},$$

in der ν die Anzahl der Ladungen der positiven Kugel, deren Radius b ist, bedeutet, und θ_s der Winkel zwischen den Radien nach Elektron 0 und s ist. Setzt man

$$(2.) \qquad S_n = \sum_1^{n-1 s} \frac{1}{\sin\frac{\theta_s}{2}},$$

wobei $\frac{\theta_s}{2}$ nacheinander folgende Werte annimmt

$$\frac{\theta_s}{2} = \frac{\pi}{n}, 2\frac{\pi}{n}, 3\frac{\pi}{n}, \ldots (n-1)\frac{\pi}{n},$$

so wird aus der Gleichung (1.)

$$(3.) \qquad \frac{\nu}{b^3} a^3 = \frac{S_n}{4}.$$

Die Werte von S_n berechnen sich zu

$$S_2 = 1;\ S_3 = 2{,}309;\ S_4 = 3{,}828;\ S_5 = 5{,}506;\ S_6 = 7{,}309.$$

Wenden wir uns nun zu der schwierigeren Aufgabe, diese Gleichgewichtslage auf Stabilität zu prüfen. Zu dem Zweck denken wir uns alle n Elektronen aus ihrer Gleichgewichtslage um unendlich kleine Größen verschoben, und zwar soll Elektron s, dem im Falle des Gleichgewichts die Zylinderkoordinaten $r = a, \theta = s\frac{2\pi}{n}, z = 0$ zukommen, nunmehr die entsprechenden geänderten Koordinaten:

$$r_s = a + \varrho_s;\ \theta_s = \frac{2\pi}{n} s + (\varphi_s - \varphi_0);\ z_s = z_s$$

besitzen; dabei sind die ϱ, φ, z unendlich kleine Größen erster Ordnung. Was den Winkel θ_s betrifft, so ist er immer von Elektron 0 aus gemessen, für das wir zunächst die Bewegungsgleichungen aufstellen wollen. Diese lauten:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-U)}{\partial\xi'} - \frac{\partial(T-U)}{\partial\xi} = 0$$

wobei ξ entweder r_0, θ_0 oder z_0 bedeuten soll. Da bei unseren Betrach-

tungen in U niemals die Geschwindigkeiten auftreten, so reduziert sich diese Gleichung auf

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \xi'} - \frac{\partial (T-U)}{\partial \xi} = 0. \tag{4.}$$

Die lebendige Kraft T ist

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}_0^2 + r_0^2\,\dot{\theta}_0^2 + \dot{z}_0^2). \tag{5.}$$

Dabei bedeuten die Punkte über den Koordinaten Differentiationen nach der Zeit. U setzt sich (vgl. Dissert. Gleichung (13.)) aus zwei Teilen zusammen: nämlich dem quadratischen Potential für Elektron 0:

$$U_1 = \frac{\nu}{2b^3}(r_0^2 + z_0^2) \tag{6.}$$

und dem *Newton*schen Potential für Elektron 0:

$$U_2 = \sum_1^{n-1}{}_s \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r_s^2 - 2r_0 r_s \cos\left(s\frac{2\pi}{n} + \varphi_s - \varphi_0\right) + z_0^2 + z_s^2 - 2z_0 z_s}}. \tag{7.}$$

Wir gehen nun dazu über, die Ableitungen des *Newton*schen Potentials U_2 unter Beibehaltung nur der ersten Potenzen der unendlich kleinen Größen zu entwickeln:

$$\frac{\partial U_2}{\partial \varrho_0} = -\sum_1^{n-1}{}_s \frac{1}{8a^3 \sin^3 s\frac{\pi}{n}} \Big\{ 2a \sin^2 s\frac{\pi}{n} + \varrho_0 - \varrho_s \cos s\frac{2\pi}{n} + a \sin s\frac{2\pi}{n}(\varphi_s - \varphi_0)$$
$$- 3\sin^2 s\frac{\pi}{n}\cdot(\varrho_0 + \varrho_s) - \frac{3a}{2}\sin s\frac{2\pi}{n}\cdot(\varphi_s - \varphi_0)\Big\}$$
$$= -\sum_1^{n-1}{}_s \frac{1}{4a^2 \sin s\frac{\pi}{n}} \Big\{ 1 - \frac{\varrho_0}{a}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\sin^2 s\frac{\pi}{n}}\right) - \frac{\varrho_s}{2a}\left(1 + \frac{1}{\sin^2 s\frac{\pi}{n}}\right)$$
$$- \frac{1}{2}\cot s\frac{\pi}{n}(\varphi_s - \varphi_0)\Big\},$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \varphi_0} = \sum_1^{n-1}{}_s \frac{\cos s\frac{\pi}{n}}{4a \sin^2 s\frac{\pi}{n}} \Big\{ 1 - \frac{\varrho_0 + \varrho_s}{2a} - \Big(\cot s\frac{\pi}{n} + \frac{1}{2}\operatorname{tg} s\frac{\pi}{n}\Big)(\varphi_s - \varphi_0)\Big\}.$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial z_0} = -\sum_1^{n-1}{}_s \frac{z_0 - z_1}{8a^3 \sin^3 s\frac{\pi}{n}}.$$

Um die Ausdrücke für $\frac{\partial U_2}{\partial \varrho_0}$, $\frac{\partial U_2}{\partial \varphi_0}$, $\frac{\partial U_2}{\partial z_0}$ besser zu übersehen, führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$S_n = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin 2\frac{\pi}{n}} + \cdots + \frac{1}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}},$$

$$A' = \frac{1}{8a^3}\left\{3S_n - \left(\frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin^3 2\frac{\pi}{n}} + \cdots + \frac{1}{\sin^3\frac{(n-1)\pi}{n}}\right)\right\},$$

$$A_s = \frac{1}{8a^3}\left\{\frac{1}{\sin s\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin^3 s\frac{\pi}{n}}\right\};\quad B_s = \frac{1}{8a^3}\,\frac{\cos s\frac{\pi}{n}}{\sin^2 s\frac{\pi}{n}},$$

(8.)
$$C = \frac{1}{4a^3}\left\{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\left(\cot\frac{\pi}{n} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) + \frac{\cos 2\frac{\pi}{n}}{\sin^2 2\frac{\pi}{n}}\left(\cot 2\frac{\pi}{n} + \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\frac{\pi}{n}\right) + \cdots\right\},$$

$$C_s = \frac{1}{4a^3}\,\frac{\cos s\frac{\pi}{n}}{\sin^2 s\frac{\pi}{n}}\left(\cot s\frac{\pi}{n} + \frac{1}{2}\operatorname{tg} s\frac{\pi}{n}\right),$$

$$D = \frac{1}{8a^3}\left(\frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin^3 2\frac{\pi}{n}} + \cdots + \frac{1}{\sin^3\frac{(n-1)\pi}{n}}\right),\quad D_s = \frac{1}{8a^3}\,\frac{1}{\sin^3 s\frac{\pi}{n}}.$$

Wenn man noch bedenkt, daß

(9.)
$$\sum_1^{n-1 s}\frac{\cos s\frac{\pi}{n}}{\sin^2 s\frac{\pi}{n}} = 0,$$

so erhält man folgende Darstellung der drei Differentialquotienten von U_2:

(a.)
$$\frac{\partial U_2}{\partial \varrho_0} = -\left(\frac{S_n}{4a^2} - \varrho_0 A' - \sum_1^{n-1 s}\varrho_s A_s - a\sum_1^{n-1 s}\varphi_s B_s\right),$$

(10.) (b.)
$$\frac{\partial U_2}{\partial \varphi_0} = -\left(a\sum_1^{n-1 s}\varrho_s B_s - a^2\varphi_0 C + a^2\sum_1^{n-1 s}\varphi_s C_s\right),$$

(c.)
$$\frac{\partial U_2}{\partial z_0} = -Dz_0 + \sum_1^{n-1 s} z_s D_s.$$

Die *Lagrange*schen Gleichungen lauten also für Elektron 0 folgendermaßen:

(a.)
$$m\ddot{\varrho}_0 + \frac{\nu}{b^3}(a+\varrho_0) + \frac{\partial U_2}{\partial \varrho_0} = 0,$$

(11.) (b.)
$$ma^2\ddot{\varphi}_0 + \frac{\partial U_2}{\partial \varphi_0} = 0,$$

(c.)
$$m\ddot{z}_0 + \frac{\nu}{b^3}z_0 + \frac{\partial U_2}{\partial z_0} = 0.$$

Wir machen nun den Ansatz

$$(12.) \qquad \varrho_0 = e^{int}\bar{\varrho}_0;\ \varphi_0 = e^{int}\bar{\varphi}_0;\ z_0 = e^{int}\bar{z}_0.$$

Ich benutze hier die imaginäre Form e^{int} statt $\cos nt$ bzw. $\sin nt$, da sich leichter mit ihr rechnen läßt. $\bar{\varrho}_0, a\bar{\varphi}_0, \bar{z}_0$ bedeuten jetzt die komplexen Amplituden von $\varrho_0, a\varphi_0, z_0$. Durch zweimalige Differentiation nach t geht aus (12.) hervor:

$$(13.) \qquad \ddot{\varrho}_0 = -n^2\varrho_0;\ \ddot{\varphi}_0 = -n^2\varphi_0;\ \ddot{z}_0 = -n^2 z_0.$$

Die Gleichungen (11.) werden damit unter Berücksichtigung von (3.)

$$(a.) \quad \varrho_0\left(-mn^2 + \frac{\nu}{b^3} + A'\right) + \sum_1^{n-1 s} \varrho_s A_s + a\sum_1^{n-1 s} \varphi_s B_s = 0,$$

$$(14.) \quad (b.) \quad \varphi_0(-mn^2 + a^2 C) - a\sum_1^{n-1 s} \varrho_s B_s - a^2 \sum_1^{n-1 s} \varphi_s C_s = 0,$$

$$(c.) \quad z_0\left(-mn^2 + \frac{\nu}{b^3} - D\right) + \sum_1^{n-1 s} z_s D_s = 0.$$

Somit haben wir drei homogene Gleichungen, denen unsere $3n$ Unbekannten genügen müssen, gefunden. Die fehlenden $3(n-1)$ Gleichungen lassen sich nach dem Vorbild der obigen drei sofort hinschreiben. Da im Ring kein Elektron vor den übrigen ausgezeichnet ist, so erhalte ich aus den Gleichungen (14.) die folgenden auf Elektron p bezogenen Gleichungen:

$$(a.) \quad \varrho_p\left(-mn^2 + \frac{\nu}{b^3} + A'\right) + \sum_1^{n-1 s} \varrho_{p+s} A_s + a\sum_1^{n-1 s} \varphi_{p+s} B_s = 0,$$

$$(15.) \quad (b.) \quad \varphi_p(-mn^2 + a^2 C) - a\cdot\sum_1^{n-1 s} \varrho_{p+s} B_s - a^2 \sum_1^{n-1 s} \varphi_{p+s} C_s = 0,$$

$$(c.) \quad z_p\left(-mn^2 + \frac{\nu}{b^3} - D\right) + \sum_1^{n-1 s} z_{p+s} D_s = 0.$$

Wir haben demnach $3n$ homogene lineare Gleichungen für die $3n$ Unbekannten. Sie liefern eine Lösung, wenn die Determinante verschwindet. Ich erhalte also eine Determinante vom Grade $3n$ und die Auflösung derselben liefert eine Gleichung vom Grad $3n$ in $mn^2 = x$. Von dieser Gleichung, der Säkulargleichung, die in der Literatur eine große Rolle spielt, ist bekannt, daß sie nur reelle Wurzeln besitzt.

Bekanntlich liefern uns die Gleichungen (15.) die sog. $3n$ freien Schwingungen oder Hauptschwingungen des Systems. Es stimmt die Anzahl $3n$ der Hauptschwingungen mit der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems überein. Die n Gleichungen (15c.) enthalten bloß die Unbekannten $z_0, z_1, \ldots z_{n-1}$, dagegen nicht die ϱ und φ, während in (15a.) und (15b.)

die z. nicht auftreten. Es trennen sich demnach die Hauptschwingungen von vorneherein in zwei Gruppen: n Schwingungen parallel der z-Achse und $2n$ Schwingungen der Elektronen in der Ringebene. Wir werden diese beiden Gruppen von Schwingungen auch getrennt behandeln. Beschäftigen wir uns zunächst mit den Schwingungen in der Ringebene. Um von dem Bau der Gleichung (15.) ein klares Bild zu erhalten, schreiben wir sie noch einmal ausführlicher an:

$$\text{(a.)}\quad \begin{cases} \varrho_0\left(-x+\frac{\nu}{b^3}+A'\right)+A_1\varrho_1+A_2\varrho_2+\cdots+A_{n-1}\varrho_{n-1}+ \\ \qquad +0\cdot a\varphi_0+B_1\cdot a\varphi_1+B_2\cdot a\varphi_2+\cdots+B_{n-1}\cdot a\varphi_{n-1}=0, \\ A_{n-1}\varrho_0+\varrho_1\left(-x+\frac{\nu}{b^3}+A'\right)+A_1\varrho_2+\cdots+A_{n-2}\varrho_{n-1}+ \\ \qquad +B_{n-1}\cdot a\varphi_0+0\cdot a\varphi_1+B_1\cdot a\varphi_2+\cdots+B_{n-2}\cdot a\varphi_{n-1}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\

so ist einfach

$$(19.) \qquad \Gamma_1 = -x + \frac{3\nu}{b^3}; \quad \Gamma_2 = 0; \quad \Gamma_3 = -x,$$

sodaß sich die Gleichungen (17.) vereinfachen zu

$$(20.) \quad (a.) \quad \left(-x + \frac{3\nu}{b^3}\right)(\varrho_0 + \varrho_1 + \cdots + \varrho_{n-1}) = 0,$$

$$(b.) \quad x(\varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_{n-1}) = 0.$$

Entsprechend wollen wir die n Gleichungen (15c.) behandeln. Da deren Determinante auch symmetrisch ist, so liefert die Summe der n Gleichungen

$$\Gamma_4 \cdot (z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1}) = 0,$$

wobei wegen (8.)

$$\Gamma_4 = -x + \frac{\nu}{b^3} - D + \sum_1^{n-1 s} D_s = -x + \frac{\nu}{b^3},$$

also

$$(21.) \qquad \left(-x + \frac{\nu}{b^3}\right)(z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1}) = 0.$$

Aus den Gleichungen (20.) und (21.) lernen wir eine erste charakteristische Eigenschaft der Hauptschwingungen unseres Systems kennen. Bei den n Hauptschwingungen parallel der z-Achse ist wegen (21.) immer $\sum_0^{n-1 s} z_s = 0$ mit Ausnahme einer einzigen Schwingung, deren Frequenz durch $x = \frac{\nu}{b^3}$ bestimmt ist. Man kann aber von vorneherein eine Hauptschwingung des Systems angeben, bei der $\sum_0^{n-1 s} z_s \neq 0$, nämlich die Schwingung des ganzen Systems als starres Gebilde längs der z-Achse. Diese Schwingung muß demnach die Frequenz $n = \sqrt{\frac{\nu}{m b^3}}$ haben. Alle übrigen Hauptschwingungen, bei denen die Elektronen längs der z-Achse schwingen, erfüllen die Bedingung $\sum_0^{n-1 s} z_s = 0$.

Entsprechendes gilt für die Gleichungen (20a.) und (20b.). Folglich ist für alle Hauptschwingungen, die in der Ebene des Ringes sich abspielen, $\sum_0^{n-1 s} \varrho_s = 0$ mit Ausnahme der Schwingung, deren Frequenz sich aus $x = \frac{3\nu}{b^3}$ ergibt; für $x = \frac{3\nu}{b^3}$ darf $\sum_0^{n-1 s} \varrho_s \neq 0$ sein. Man kennt wieder von vorneherein eine Schwingung, bei der $\sum_0^{n-1 s} \varrho_s \neq 0$ ist, nämlich die pulsierende Schwingung, wo alle n Elektronen gleichzeitig mit gleichen Be-

trägen längs ihrer Radien schwingen. Damit haben wir eine neue Hauptschwingung mit der Frequenz $n = \sqrt{\frac{3\nu}{m b^3}}$ gefunden. Schließlich findet man mühelos eine letzte Hauptschwingung mit der Frequenz $n = 0$, wobei $\sum_0^{n-1} \varphi_s \neq 0$, während sonst immer $\sum_0^{n-1} \varphi_s = 0$ gelten muß. Diese Frequenz liefert tatsächlich keine Schwingung, sondern entspricht der Drehung des Ringes als starres Gebilde in sich; $n = 0$ bedeutet bekanntlich in der Theorie der kleinen Schwingungen, daß das System auch in der unmittelbaren Nachbarschaft Gleichgewichtslagen besitzt. Das trifft auch hier zu; denn drehe ich den Ring in sich um einen unendlich kleinen oder sogar endlichen Winkel, so kommt er immer wieder in Gleichgewichtslagen. Das letztere gilt übrigens nicht nur für die Drehung um die z-Achse, die wir eben betrachtet haben, sondern natürlich auch für jede Drehung um eine ganz beliebige Achse durch den Mittelpunkt der Kugel. Aus diesem Grunde ist zu erwarten, daß $x = 0$ dreifache Wurzel der Säkulargleichung ist. Auch von der Lösung $x = \frac{\nu}{b^3}$ ist zu erwarten, daß sie dreifache Wurzel der Säkulargleichung sein muß. Denn nicht nur die Schwingung des starr gedachten Ringes längs der z-Achse ist möglich, sondern parallel jeder Richtung im Raum kann die Schwingung des ganzen Ringes vor sich gehen. Da bei diesen Schwingungen sich das *Newton*sche Potential für das einzelne Elektron nicht ändert, sondern bloß das quadratische Potential und zwar derart, daß die in die Gleichgewichtslage zurücktreibende Kraft proportional der Entfernung von ihr und daher für alle Elektronen gleich groß ist, so findet die Schwingung ebenso statt, als wenn die Gesamtmasse und Gesamtladung aller Elektronen in deren Schwerpunkt, dem Mittelpunkte des Ringes, vereinigt wäre. Letzterer fällt aber in der Gleichgewichtslage mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammen. Da aber für ein Elektron im Mittelpunkt der Kugel tatsächlich alle Richtungen gleichwertig sind, so ist damit bewiesen, daß die fragliche Schwingung nach jeder Richtung mit der gleichen Frequenz möglich ist und daß daher $x = \frac{\nu}{b^3}$ dreifache Wurzel der Säkulargleichung sein muß.

Wir haben demnach jetzt die dreifachen Wurzeln $x = 0$ und $x = \frac{\nu}{b^3}$ unserer Säkulargleichung entsprechend den Drehungen um drei zu einander

senkrechte Achsen und den Schwingungen längs dieser Achsen und ferner die pulsierende Schwingung des Ringes mit der durch $x = \frac{3\nu}{b^3}$ bestimmten Frequenz. Im übrigen haben wir erkannt, daß für alle anderen Hauptschwingungen

$$(22.) \qquad \sum_0^{n-1 s} z_s = 0; \quad \sum_0^{n-1 s} \varrho_s = 0; \quad \sum_0^{n-1 s} \varphi_s = 0$$

gilt.

Um nun aber die Frequenzen *aller* Hauptschwingungen zu erhalten, benutzen wir folgenden Ansatz:

$$(23.) \quad \begin{aligned} &\varrho_1 = \alpha\varrho_0;\ \varrho_2 = \alpha^2\varrho_0;\ \varrho_3 = \alpha^3\varrho_0;\ \dots\ \varrho_{n-1} = \alpha^{n-1}\varrho_0, \\ &\varphi_1 = \alpha\varphi_0;\ \varphi_2 = \alpha^2\varphi_0;\ \varphi_3 = \alpha^3\varphi_0;\ \dots\ \varphi_{n-1} = \alpha^{n-1}\varphi_0, \\ &z_1 = \alpha z_0;\ z_2 = \alpha^2 z_0;\ z_3 = \alpha^3 z_0;\ \dots\ z_{n-1} = \alpha^{n-1} z_0, \end{aligned}$$

wobei α irgend eine Wurzel der Gleichung $x^n = 1$ sein soll. Dieser Ansatz entspricht dem symmetrischen Bau der $3n$ Gleichungen (15.). Man findet durch Einsetzen in diese Gleichungen, daß (15a.), (15b.) und (15c.) je in eine Gleichung übergehen mit den drei Unbekannten $\varrho_0, \varphi_0, z_0$, in denen aber noch die Wurzel α auftritt, sodaß wir mit den n verschiedenen Werten für α gerade n solcher Gleichungstripel erhalten:

$$(a.) \quad \varrho_0\Big(-x + \frac{\nu}{b^3} + A' + \sum_1^{n-1 s} \alpha^s A_s\Big) + a\varphi_0 \sum_1^{n-1 s} \alpha^s B_s = 0,$$

$$(24.)\ (b.) \quad -\varrho_0 a \sum_1^{n-1 s} \alpha^s B_s + \alpha^2\varphi_0\Big(-x + C - \sum_1^{n-1 s} \alpha^s C_s\Big) = 0,$$

$$(c.) \quad z_0\Big(-x + \frac{\nu}{b^3} - D + \sum_1^{n-1 s} \alpha^s D_s\Big) = 0.$$

Wie wir wissen, liefern (24a.) und (24b.) die Schwingungen in der Ringebene. Die Determinante dieser beiden Gleichungen ist

$$(25a.) \quad \begin{vmatrix} -x + \frac{\nu}{b^3} + A' + \sum_1^{n-1 s} \alpha^s A_s & a \cdot \sum_1^{n-1 s} \alpha^s B_s \\ -a \sum_1^{n-1 s} \alpha^s B_s & a^2\Big(-x + C - \sum_1^{n-1 s} \alpha^s C_s\Big) \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus folgt

$$(25b.) \quad \Big(-x + \frac{\nu}{b^3} + A' + \sum_1^{n-1 s} \alpha^s A_s\Big)\Big(x - C + \sum_1^{n-1 s} \alpha^s C_s\Big) = \Big[\sum_1^{n-1 s} \alpha^s B_s\Big]^2;$$

ebenso aus (24c.)

$$(26.) \qquad x = \frac{\nu}{b^3} - D + \sum_1^{n-1 s} \alpha^s D_s.$$

Wir wollen versuchen, ob der Ansatz (23.) die Bedingungen (22.) erfüllt. In der Tat ist dies der Fall, wenn $\sum_0^{n-1} \alpha^s = 0$. Diese Gleichung trifft aber für alle Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$ zu mit Ausnahme von $\alpha = 1$. Setzen wir aber in (25.) und (26.) $\alpha = +1$ ein, so erhalten wir für x die drei Werte $x = 0$; $x = \frac{\nu}{b^3}$; $x = \frac{3\nu}{b^3}$, für die eben gerade die Bedingungen (22.) nicht zu gelten brauchen, wie wir erkannt haben. Man sieht daraus, daß der Ansatz (23.), der unsere ganze Aufgabe wesentlich erleichtert hat, für die kleinen Schwingungen sehr geeignet ist. Wir werden ihn auch fernerhin bei schwierigeren Stabilitätsuntersuchungen stets mit Vorteil anwenden. Er entspricht der Symmetrie der Anordnung um die z-Achse.

Der Ansatz (23.), der sich wegen des symmetrischen Baues der $3n$ Gleichungen (15.) unmittelbar aufdrängt, läßt sich auch leicht aus der Determinantentheorie ableiten. Um die Stabilität der Schwingungen parallel der z-Achse zu untersuchen, müssen wir die Determinante der n Gleichungen (15c.) gleich Null setzen. Mit $m\,\mathfrak{n}^2 = x$ erhalten wir folgende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\nu}{b^3} - D - x & D_1 & D_2 & D_3 \dots & D_{n-1} \\ D_{n-1} & \frac{\nu}{b^3} - D - x & D_1 & D_2 \dots & D_{n-2} \\ D_{n-2} & D_{n-1} & \frac{\nu}{b^3} - D - x & D_1 \dots & D_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_1 & D_2 & D_3 \dots & \frac{\nu}{b^3} - D - x & \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante ist dadurch ausgezeichnet, daß jede Zeile dieselben Glieder wie die vorhergehende enthält in derselben Reihenfolge, nur jedes um eine Stelle nach rechts gerückt. Eine solche Determinante wird *Zirkulante* genannt. Von ihr wird in der Determinantentheorie bewiesen, daß ihr Wert gleich ist

$$F(\alpha_1) \cdot F(\alpha_2) \cdot F(\alpha_3) \cdots F(\alpha_n)$$

wobei $\alpha_1, \dots \alpha_n$ die n Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$ sind und

$$F(\alpha) = \left(\frac{\nu}{b^3} - D - x\right) \cdot 1 + D_1 \alpha^1 + D_2 \alpha^2 + \cdots + D_{n-1} \alpha^{n-1},$$

also nichts anderes ist als die linke Seite der Gleichung (15c.), wenn man

in dieser durch z_p dividiert und $\frac{z_{p+1}}{z_p} = \alpha$, $\frac{z_{p+2}}{z_p} = \alpha^2, \ldots$ setzt. Ganz entsprechend kommt man durch Behandeln der Determinante der $2n$ Gleichungen (15a.) und (15b.) zu den Beziehungen:

$$\varrho_{p+1} = \alpha \varrho_p,\ \varrho_{p+2} = \alpha^2 \varrho_p, \ldots;\ \varphi_{p+1} = \alpha \varphi_p,\ \varphi_{p+2} = \alpha^2 \varphi_p, \ldots$$

Dies ist aber gerade unser Ansatz (23.).

Gleichung (25b.) und (26.) liefern uns nun sofort die Stabilitätsbedingungen für die Schwingungen der Elektronen in der Ringebene bzw. senkrecht dazu. Da x jedenfalls reell ist, so lauten die Bedingungen dafür, daß x nur positive Werte annimmt;

$$(27\text{a.})\quad \Big(\frac{v}{b^3} + A' + \sum_1^{n-1 s} \alpha^s A_s\Big) + C - \sum_1^{n-1 s} \alpha^s C_s > 0,$$

$$(27\text{b.})\quad \Big(\frac{v}{b^3} + A' + \sum_1^{n-1 s} \alpha^s A_s\Big) \cdot \Big(C - \sum_1^{n-1 s} \alpha^s C_s\Big) + \Big[\sum_1^{n-1 s} \alpha^s B_s\Big]^2 > 0, \quad \text{bzw.}$$

$$(28.)\quad \frac{v}{b^3} - D + \sum_1^{n-1 s} \alpha^s D_s > 0.$$

Aus Tabelle (8.) erkennt man, daß

$$(29.)\quad A_{n-s} = A_s;\ C_{n-s} = C_s;\ D_{n-s} = D_s;\ B_{n-s} = -B_s.$$

Infolgedessen heben sich in $\sum_1^{n-1 s} \alpha^s A_s$, $\sum_1^{n-1 s} \alpha^s C_s$, $\sum_1^{n-1 s} \alpha^s D_s$ die imaginären Bestandteile fort, während in $\sum_1^{n-1 s} \alpha^s B_s$ gerade bloß die imaginären stehen bleiben, sodaß $\Big[\sum_1^{n-1 s} \alpha^s B_s\Big]^2$ eine negative reelle Größe darstellt. In den obigen Ungleichungen treten demnach bloß reelle Größen auf, unabhängig von dem Wert $\alpha_k = e^{k\frac{2i\pi}{n}}$. Zugleich erkennt man, daß wegen $C \geqq \sum_1^{n-1 s} \alpha^s C_s$, und da $\Big[\sum_1^{n-1 s} \alpha^s B_s\Big]^2 \leqq 0$, sicher (27a.) erfüllt ist, sobald es (27b.) ist. Wir brauchen uns also für die Schwingungen der Elektronen in der Ringebene bloß um (27b.) zu kümmern. Bevor wir zur Diskussion der Ungleichung (27b.) schreiten, wollen wir einige übersichtliche Bezeichnungen einführen, wobei zu bedenken ist, daß α als Wurzel der Gleichung $x^n = 1$ die Werte $\alpha_k = e^{k\frac{2i\pi}{n}}$ $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots n-1)$ annehmen kann:

$$(30.)\quad\begin{cases} A = A' + \dfrac{\nu}{b^3} = \dfrac{3S_n}{4a^3} - \sum\limits_1^{n-1 s} A_s. \\ L_k = \sum\limits_1^{n-1 s} \alpha_k^s A_s = \dfrac{1}{8a^3} \sum\limits_1^{n-1 s} \left(\dfrac{1}{\sin s\dfrac{\pi}{n}} + \dfrac{1}{\sin^3 s\dfrac{\pi}{n}} \right) \cdot \cos s\dfrac{2k\pi}{n};\quad L_0 = \sum\limits_1^{n-1 s} A_s. \\ N_k = \sum\limits_1^{n-1 s} \alpha_k^s C_s = \dfrac{1}{8a^3} \sum\limits_1^{n-1 s} \left(\dfrac{2}{\sin^3 s\dfrac{\pi}{n}} - \dfrac{1}{\sin s\dfrac{\pi}{n}} \right) \cdot \cos s\dfrac{2k\pi}{n};\quad N_0 = \sum\limits_1^{n-1 s} C_s. \\ iM_k = \sum\limits_1^{n-1 s} \alpha_k^s B_s = \dfrac{i}{8a^3} \sum\limits_1^{n-1 s} \dfrac{\cos s\dfrac{\pi}{n}}{\sin^2 s\dfrac{\pi}{n}} \sin s\dfrac{2k\pi}{n}. \\ P_k = \sum\limits_1^{n-1 s} \alpha^s D_s = \dfrac{1}{8a^3} \sum\limits_1^{n-1 s} \dfrac{\cos s\dfrac{2k\pi}{n}}{\sin^3 s\dfrac{\pi}{n}};\qquad P_0 = \sum\limits_1^{n-1 s} D_s. \end{cases}$$

Mit diesen Abkürzungen schreiben sich die Ungleichungen (27 b.) und (28.) folgendermaßen:

$$(31.)\qquad \left(\frac{3S_n}{4a^3} - L_0 + L_k\right)(N_0 - N_k) > M_k^2.$$

$$(32.)\qquad \frac{\nu}{b^3} - P_0 + P_k > 0.$$

Ersetzt man darin k durch $n-k$, so ergeben sich nach (30.) dieselben Ungleichungen, d. h. aber, wir brauchen bloß für die Werte $k = 1, 2, \ldots \frac{n}{2}$ bei geradem n, und für $k = 1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2}$ bei ungeradem n die Ungleichungen (31.) und (32.) zu prüfen. Bevor wir uns dieser Aufgabe unterziehen, wollen wir von den Schwingungen der Elektronen in der Ringebene ein geometrisches Bild entwerfen.

Mit den neuen durch (30.) eingeführten Bezeichnungen gehen die Gleichungen (24 a.) und (24 b.) über in

$$(33.)\quad\begin{cases} \text{(a.)} & \varrho_0(-x + A + L_k) + ia\,\varphi_0 M_k = 0, \\ \text{(b.)} & \varrho_0 M_k + ia\,\varphi_0(-x + N_0 - N_k) = 0 \end{cases}$$

während die zur Berechnung der Frequenzen nötige Gleichung die folgende Gestalt annimmt

$$(34.)\qquad (-x + A + L_k)(-x + N_0 - N_k) = M_k^2.$$

Da Gleichung (34.) bloß reelle Werte für x liefert, so ist das aus (33.)

hervorgehende Verhältnis $\frac{a\varphi_0}{\varrho_0}$ rein imaginär. Da nach (23.)

$$\frac{a\varphi_0}{\varrho_0} = \frac{a\varphi_1}{\varrho_1} = \frac{a\varphi_2}{\varrho_2} = \cdots = \frac{a\varphi_{n-1}}{\varrho_{n-1}},$$

so gilt das Gleiche von den Schwingungskomponenten aller Elektronen. Die Tatsache, daß das Verhältnis $\frac{a\varphi_0}{\varrho_0}$ rein imaginär ist, bedeutet aber, daß das Elektron 0 eine elliptische Schwingung ausführt, deren Ellipse die Koordinatenachsen zu Hauptachsen hat, und daß der absolute Betrag $\left|\frac{a\varphi_0}{\varrho_0}\right|$ das Achsenverhältnis der Ellipse liefert*). Dasselbe gilt natürlich von allen anderen Elektronen. Da $\left|\frac{a\varphi_h}{\varrho_h}\right| = \left|\frac{a\varphi_0}{\varrho_0}\right|$, so beschreiben alle Elektronen gleiche Ellipsen, deren Mittelpunkte mit der Ruhelage der Elektronen zusammenfallen, während die Hauptachsen in der Richtung des Radius und senkrecht dazu liegen. Es fragt sich jetzt nur noch, welche Lagen die verschiedenen Elektronen $0, 1, \ldots n-1$ in gleichen Zeitmomenten auf ihren Ellipsen einnehmen. M. a. W.: was bedeutet der Ansatz (23.) geometrisch, wenn $\alpha_k = e^{k\frac{2i\pi}{n}}$ $(k = 0, 1, \ldots n-1)$? Um dies zu beantworten, denken wir uns ϱ_0 und $a\varphi_0$, die doch gleichzeitig Amplitude und Phasenverzögerung enthalten, folgendermaßen dargestellt:

$$\varrho_0 = P_0 e^{i(nt-f)};\ a\varphi_0 = a\Phi_0 e^{i(nt-g)}.$$

Dabei sind P_0, Φ_0, f, g reelle Größen. Die reellen Bestandteile der rechten Seiten:

$$P_0 \cos(nt-f) \qquad \text{bzw.} \qquad a\Phi_0 \cos(nt-g)$$

stellen die reellen Schwingungen entlang des Radius bzw. senkrecht dazu dar. Da $\frac{a\varphi_0}{\varrho_0}$ rein imaginär ist, so muß sein

$$e^{i(f-g)} = \pm i \quad \text{d. h.} \quad f-g = (2k-1)\frac{\pi}{2} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Demnach ist

$$\cos(nt-g) = \pm \sin(nt-f)$$

und die Schwingungskomponenten schreiben sich

$$P_0 \cos(nt-f) \quad \text{und} \quad \pm a\Phi_0 \sin(nt-f).$$

---

*) s. *W. Voigt*, Magnetooptik. S. 31 ff.

Der Endpunkt des Schwingungsvektors beschreibt also tatsächlich eine Ellipse, die die Koordinatenachsen zu Hauptachsen hat. Multiplizieren wir nun die in komplexer Form geschriebenen Schwingungskomponenten mit α_k, so erhalten wir

$$\varrho_1 = \alpha_k \varrho_0 = P_0 e^{i\left[nt-\left(f-\frac{2k\pi}{n}\right)\right]},$$

$$a\varphi_1 = \alpha_k \cdot a\varphi_0 = a\Phi_0 e^{i\left[nt-\left(g-\frac{2k\pi}{n}\right)\right]},$$

d. h. es vermindert sich die Phasenverzögerung um $k\frac{2\pi}{n}$. Jedes folgende Elektron hat also in gleichen Zeitmomenten stets eine um $k\frac{2\pi}{n}$ gegenüber dem vorhergehenden Elektron verminderte Phasenverzögerung. Auf Grund dieser Bemerkung lassen sich die den verschiedenen Hauptschwingungen ($k = 0, 1, \ldots n-1$) entsprechenden Verrückungen des Systems leicht konstruieren. Es ist zu dem Zweck nur nötig, für die verschiedenen Werte von α aus (34.) x und aus (33.) $\left|\frac{a\varphi_0}{\varrho_0}\right|$ zu berechnen. Die Figuren 2 bis 5 sind dementsprechend konstruiert. Den einzelnen Figuren sind die zugehörigen Werte k sowie die Quadrate x der Frequenzen beigeschrieben. Daß teilweise für k in Klammern noch ein zweiter Wert beigefügt ist, entspricht dem schon früher erwähnten Umstand, daß man für $k = \varkappa$ und $k = n - \varkappa$ auf dieselbe Schwingung geführt wird. Wenn man bedenkt, daß diese letzteren Schwingungen als zirkulare bzw. elliptische Schwingungen doppelt zählen, so sieht man, daß in allen gezeichneten Fällen die richtige Anzahl von Hauptschwingungen wirklich zutage tritt, nämlich

bei $n = 3$ 6 Schwingungen,
bei $n = 4$ 8 Schwingungen usw.

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, daß ν die Anzahl der positiven Ladungen der Kugel, b der Radius der Kugel und a der Radius des Elektronenringes bedeuten. Diese 3 Größen stehen in folgender Beziehung zueinander:

beim Dreierring: $\frac{\nu}{b^3} = \frac{1}{\sqrt{3}\,a^3}$, beim Viererring: $\frac{\nu}{b^3} = \frac{0{,}957}{a^3}$,

„ Fünferring: $\frac{\nu}{b^3} = \frac{1{,}38}{a^3}$, „ Sechserring: $\frac{\nu}{b^3} = \frac{1{,}83}{a^3}$.

Fig. 2 zeigt alle Hauptschwingungen des Ringes von drei Elektronen in der Ringebene. Fig. 2a, b sind die beiden linearen Schwingungen, bei

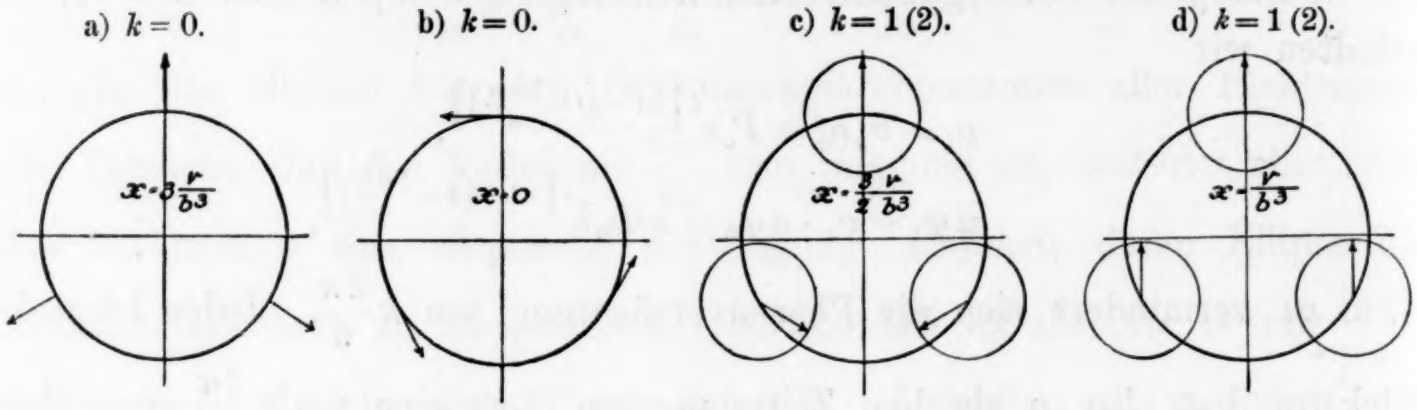
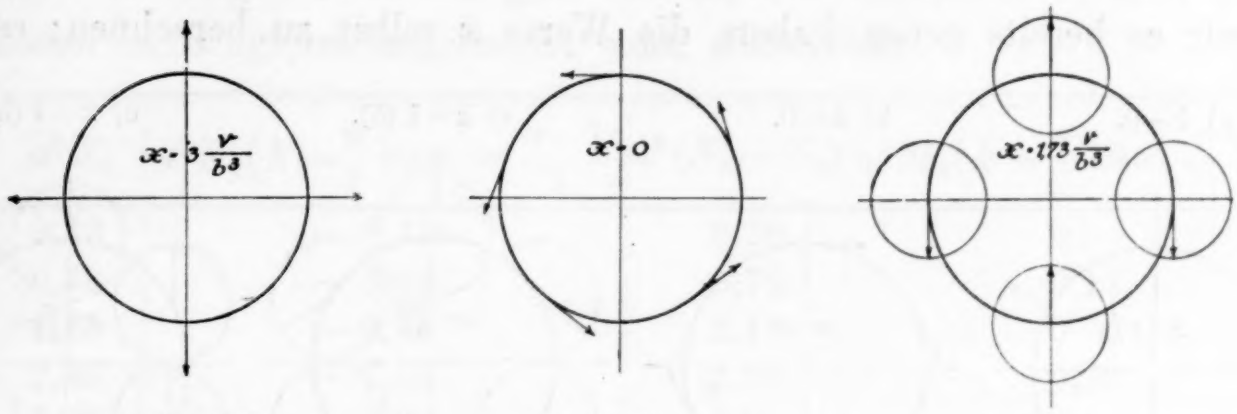


Fig. 2. $n = 3$.

denen $M_k = 0$, also $\left|\frac{a\varphi_0}{\varrho_0}\right|$ gleich Null bzw. unendlich ist. In Fig. (2c, d) ist $\left|\frac{a\varphi_0}{\varrho_0}\right| = 1$ d. h. die Schwingungsellipsen werden hier Kreise. Ganz entsprechend sind die Figuren 3 konstruiert, die die Hauptschwingungen von vier Elektronen in der Ringebene darstellen. Auch hier arten die Schwingungsellipsen in Kreise aus. Dasselbe gilt von den Hauptschwingungen des Fünfer- und Sechserringes, die in Fig. 4 und 5 veranschaulicht sind, mit Ausnahme der durch Fig. 4e, f und Fig. 5e, f dargestellten Schwingungen, welche *elliptische* Schwingungen sind.

Aus den den Figuren beigeschriebenen Werten von x erkennt man, daß der Ring mit 3, 4, 5 Elektronen für die Schwingungen, die sich in der Ringebene abspielen, stabil ist, weil alle x Werte positiv sind mit Ausnahme der trivialen Fälle $x = 0$, die zu den Drehungen gehören; daß dagegen der Sechserring labil ist wegen des Wertes $x = -\frac{0{,}02}{a^3}$ bei $k = 3$. Bemerkenswert ist, daß in allen Fällen, die wir durchgerechnet haben, die kleinsten Werte von x bei $k = \frac{n}{2}$ bzw. $k = \frac{n-1}{2}$ bei geradem bzw. ungeradem n auftreten, wenn man den trivialen Fall $x = 0$ außer acht läßt. Betrachten wir unsere Figuren daraufhin näher, so kommen wir zu dem Schluß, daß bei diesen Schwingungen mit kleinen Werten x die Nachbarelektronen sich besonders weit voneinander entfernen. Da von den Nachbarelektronen der hauptsächliche Bestandteil des Potentials herrührt, so ist es plausibel, daß diejenigen Hauptschwingungen, bei denen sich die Nachbarelektronen

a) $k=0$. b) $k=0$. c) $k=1$ (3).



d) $k=1$ (3). e) $k=2$. f) $k=2$.

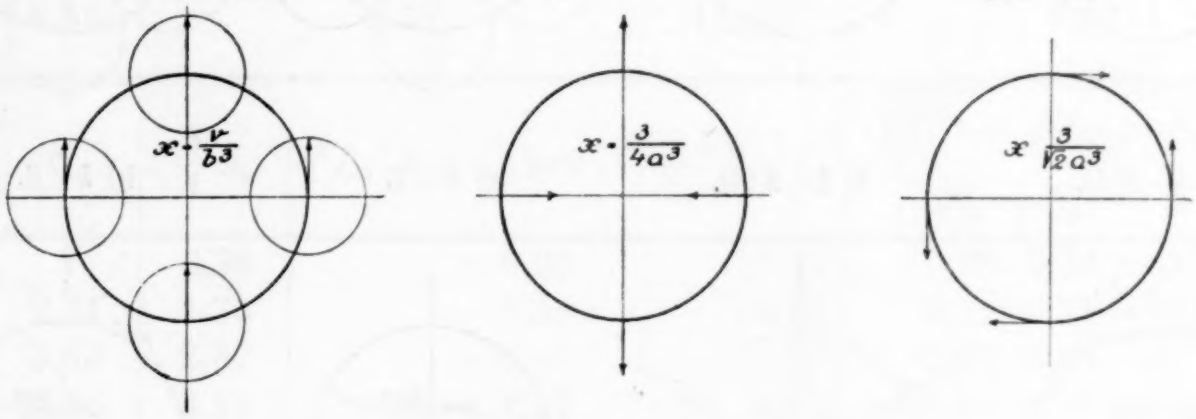
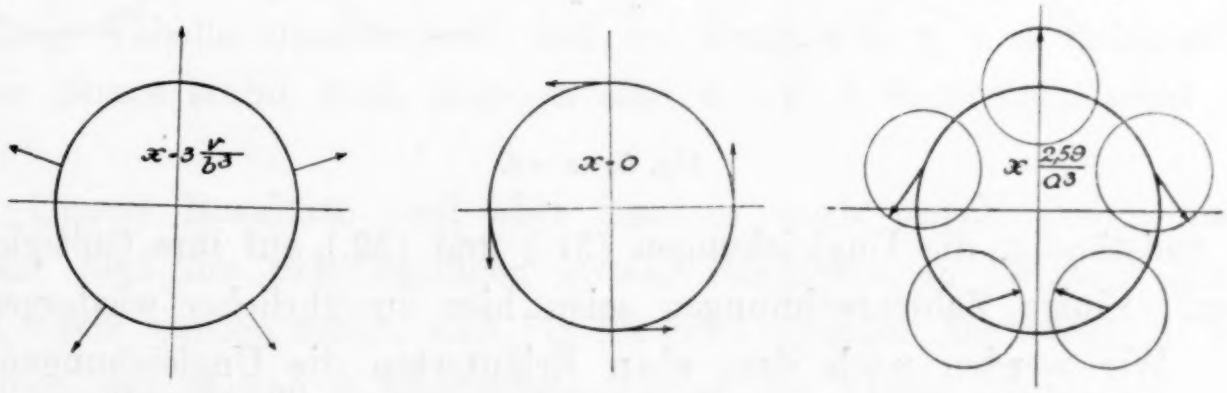


Fig. 3. $n=4$.

a) $k=0$. b) $k=0$. c) $k=1$ (4).



d) $k=1$ (4). e) $k=2$ (3). f) $k=2$ (3).

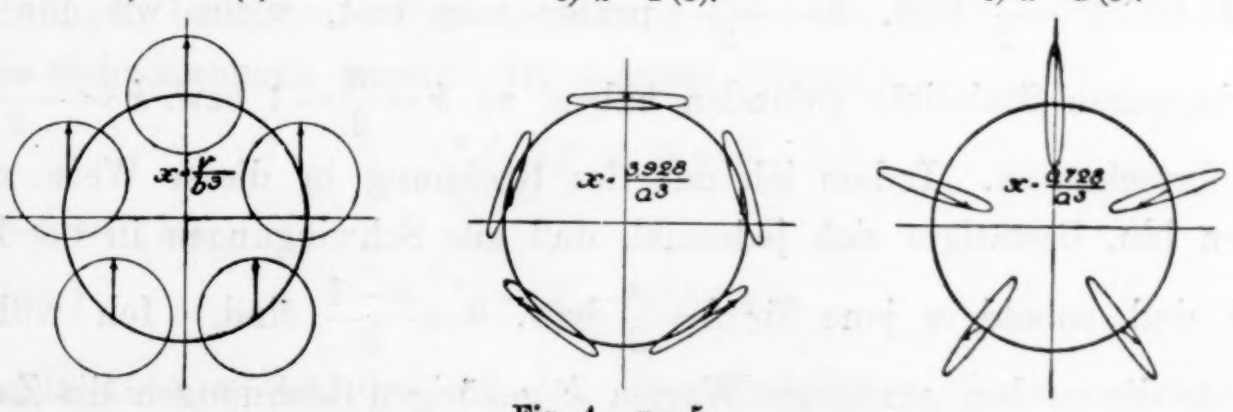


Fig. 4. $n=5$.

möglichst weit voneinander entfernen, die größte Aussicht auf Labilität besitzen.

Zur Prüfung der Stabilität einer Anordnung ist es nicht nötig, wie wir es bereits getan haben, die Werte x selbst zu berechnen; es ge-

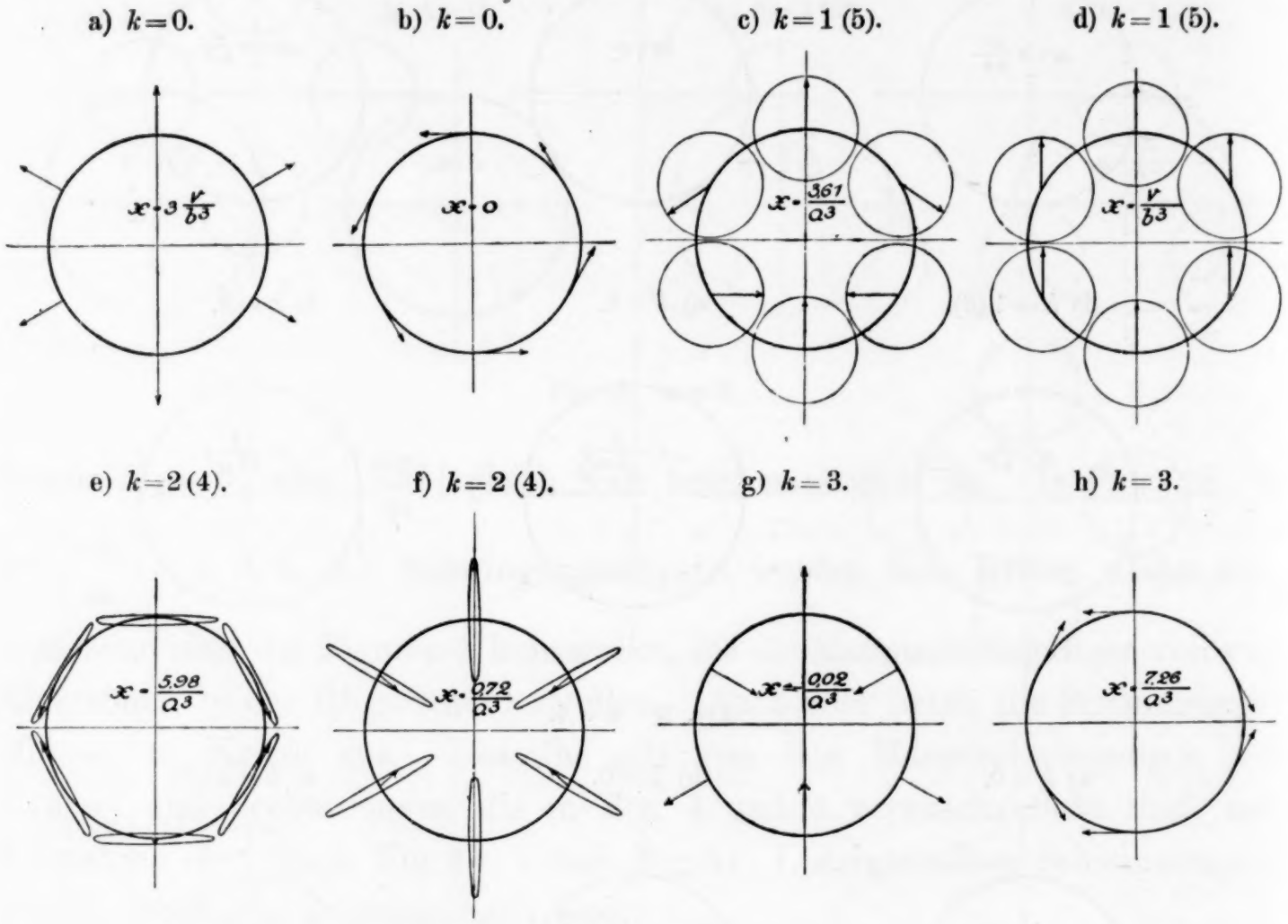


Fig. 5. $n=6$.

nügt vollständig, die Ungleichungen (31.) und (32.) auf ihre Gültigkeit zu prüfen. Einige Zahlenrechnungen seien hier ausführlicher wiedergegeben.

Wir werden nach dem eben Erläuterten die Ungleichungen stets zuerst für $k=\frac{n}{2}$ bzw. $k=\frac{n-1}{2}$ prüfen und erst, wenn wir für diese Schwingungen Stabilität gefunden haben, zu $k=\frac{n}{2}-1$ bzw. $k=\frac{n-1}{2}-1$ usw. fortschreiten. Indem ich mit der Rechnung in dieser Weise vorgegangen bin, bestätigte sich jedesmal, daß alle Schwingungen in der Ebene stabil sind, sobald es jene für $k=\frac{n}{2}$ bzw. $k=\frac{n-1}{2}$ sind. Ich will nun hier für die zu den genannten Werten k gehörigen Rechnungen die Zahlenwerte angeben. Es ist zu dem Zweck nur nötig, für die verschiedenen Werte von n die Größen S_n, $L_{\frac{n}{2}}$, bzw. $L_{\frac{n-1}{2}}$, L_0, $N_{\frac{n}{2}}$, bzw. $N_{\frac{n-1}{2}}$, N_0, zu be-

rechnen. Die folgende Tabelle gibt uns für die Fälle, daß 2, 3, 4, 5, 6, 7 Elektronen in Ringform angeordnet sind, Aufschluß:

(35.)

n	$a^3 N_0$	$a^3 N_k\left(k=\frac{n}{2}\text{ bzw. }=\frac{n-1}{2}\right)$	$a^3(N_0-N_k)$	$a^3 M_k\left(k=\frac{n}{2}\text{ bzw. }=\frac{n-1}{2}\right)$
2	0,13	− 0,13	0,26	0
3	0,48	− 0,24	0,72	0,14
4	1,19	− 0,94	2,13	0
5	2,36	− 1,55	3,91	0,26
6	3,98	− 3,02	7,00	0
7	6,55	− 4,55	11,10	0,37

n	S_n	$\frac{3}{4}S_n$	$a^3 L_k\left(k=\frac{n}{2}\text{ bzw. }\frac{n-1}{2}\right)$	$a^3 L_0$	$\left(\frac{3S_n}{4}+a^3 L_k-a^3 L_0\right)\times (N_0-N_k)-M_k^2$
2	1	0,75	− 0,25	0,25	$0{,}26\cdot 0{,}25>0$
3	2,31	1,73	− 0,34	0,68	$0{,}72\cdot 0{,}71-0{,}14^2>0$
4	3,83	2,87	− 0,81	1,31	$2{,}13\cdot 0{,}75>0$
5	5,51	4,13	− 1,17	2,21	$3{,}91\cdot 0{,}75-0{,}26^2>0$
6	7,31	5,48	− 2,07	3,43	$7{,}00\cdot(-0{,}02)<0$
7	9,26	7,95	− 2,83	5,01	$11{,}1\cdot(-0{,}89)-0{,}37^2<0$.

Aus dieser Tabelle erkennt man, daß die Ringe von 2, 3, 4, 5 Elektronen in ihrer Ebene stabil sind; dagegen sind 6 und 7 Elektronen nicht mehr stabil.

Unsere Resultate sind aber insofern noch unvollständig, als wir bis jetzt bloß die Schwingungen in der Ringebene in Betracht gezogen haben. Wir werden sehen, daß für die Schwingungen senkrecht zu dieser die Ringe mit 4 und 5 Elektronen, die in der Ebene stabil sind, labile Anordnungen bedeuten. Nach Gleichung (32.) ist die Stabilitätsbedingung für die Schwingungen parallel der z-Achse folgende:

$$\frac{\nu}{b^3}-(P_0-P_k)>0$$

oder wegen (3.)

$$\frac{S_n}{4a^3}-(P_0-P_k)>0. \tag{36.}$$

Hier gilt ganz sicher, daß P_k den kleinstmöglichen Wert annimmt, für $k=\frac{n}{2}$ bei geradem n, für $k=\frac{n-1}{2}$ bei ungeradem n. Mit $k=\frac{n}{2}$ und $\alpha=e^{i\pi}=-1$ wird nach (23.)

$$z_1 = -z_0;\ z_2 = +z_0;\ z_3 = -z_0;\ z_4 = +z_0 \cdots.$$

Die gefährlichste Schwingung, d. h. die mit der größten Aussicht auf Labilität, ist bei geradem n diejenige, bei der die Elektronen mit gerader Nummer im einen Sinn, die mit ungerader Nummer gleichzeitig im entgegengesetzten Sinn parallel der z-Achse schwingen. Folgende Tabelle gibt uns Aufschluß über die Frequenzen, die jeweils zu der gefährlichsten Schwingung parallel der z-Achse gehören:

(37.)

n	$\frac{S_n}{4}$	$a^3 P_0$	$a^3 P_{\frac{n}{2}}$ bzw. $a^3 P_{\frac{n-1}{2}}$	$a^3\left(\frac{S_n}{4a^3} - P_0 + P_k\right)\left(\begin{matrix} k=\frac{n}{2} \\ \text{bzw.} = \frac{n-1}{2}\end{matrix}\right)$
2	0,25	0,13	−0,13	0
3	0,58	0,22	−0,11	$0{,}25 > 0$
4	0,96	0,84	−0,58	$-0{,}46 < 0$
5	1,38	1,52	−0,91	$-1{,}05 < 0$
6	1,83	2,52	−1,73	$-2{,}42 < 0$
7	2,32	3,86	−2,46	$-4{,}03 < 0$

Man sieht also, daß nur für $n = 2$ und $n = 3$ die Ringanordnung stabil ist, dagegen schon bei 4 Elektronen Labilität eintritt. Daß bei $n = 2$ übrigens für $k = 2$ $x = 0$ resultiert, ist ganz klar; denn die fragliche Schwingung entspricht einer unendlich kleinen Drehung des ganzen Systems als starres um den Kugelmittelpunkt, wobei nach Früherem die Frequenz den Wert Null annehmen muß.

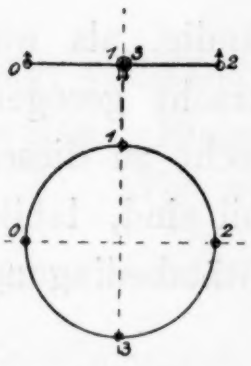


Fig. 6.

Wir haben also jetzt das Resultat, daß der einzelne Ring nur für $n = 2$ und $n = 3$ stabile Anordnungen liefert. Den Fall $n = 1$ haben wir nicht näher behandelt; es ist ganz selbstverständlich, daß ein Elektron allein im Mittelpunkt der Kugel sich in stabiler Lage befindet. Unsere gewonnenen Resultate gewähren uns also vorläufig keinen sehr tiefen Einblick in die Verhältnisse der stabilen Anordnungen der Elektronen, da schon für $n = 4$ Labilität eintritt; jedoch wissen wir, welche Schwingung bei $n = 4$ zur Labilität führt: es ist die $k = 2$ entsprechende Schwingung, wo Elektron 1 und 3 im einen, 2 und 0 im entgegengesetzten Sinn parallel der z-Achse sich verrücken (s. Figur 6.). Diese Verrückung führt aber offenbar auf die Tetraederanordnung der 4 Elektronen. Es wäre also jetzt, um die 4 Elektronen zu erledigen, not-

wendig, die Gleichsgewichtslage, wo diese 4 Elektronen an den Ecken eines regulären Tetraeders angeordnet sind, auf Stabilität zu untersuchen. Ich will jedoch diese Aufgabe, die ziemlich umständliche Rechenarbeit erfordert, auf später verschieben, wo ich gleichzeitig die Stabilität des Würfels untersuche, und will nur hier die Ergebnisse der späteren Untersuchung vorwegnehmen. Wir werden finden, daß 4 Elektronen in Tetraederanordnung vollständig stabil sind, daß dagegen ein fünftes Elektron im Mittelpunkt der Kugel das System zu einem labilen macht, und zwar ist die Schwingung, wo das mittlere Elektron gegen die Mitte einer Seitenfläche des Tetraeders schwingt, labil, sodaß also das System einer Gleichgewichtslage zustrebt, bei der drei Elektronen (2, 3, 4,) in einer Ebene durch den Kugelmittelpunkt in Ringanordnung auftreten, während die beiden übrigen (1, 5,) zu beiden Seiten des Ringes in gleichen Abständen von der Ringebene sich befinden (s. Fig. 7.). Wir wollen die Stabilität dieser Anordnung beweisen, wobei wir uns gleich der allgemeineren Aufgabe zuwenden, die Stabilität von n Elektronen zu untersuchen, von denen $n-2$ einen Ring bilden, während die beiden 1 und n als Pole oberhalb und unterhalb des Ringes auftreten. Daß eine solche Gleichgewichtslage für beliebige Anzahlen n existiert, liegt auf der Hand. Im allgemeinen werden wir zur Bestimmung der Gleichgewichtsfigur zwei Gleichungen mit zwei Parametern: dem Radius des Ringes a_1 und dem Abstand der beiden Pole vom Kugelmittelpunkt a_2 nötig haben; nur für $n = 6$ ist $a_1 = a_2$. In diesem Fall erhalten wir natürlich die Anordnung der 6 Elektronen an den Ecken eines regulären Oktaeders, dessen Mittelpunkt mit dem der Kugel zusammenfällt. Diese ganze Gruppe von Anordnungen will ich kurz durch $n = 1 + m + 1$ bezeichnen, während wir dementsprechend die vorher untersuchte Anordnung der Elektronen in einem einzelnen Ring durch $n = n$ bezeichnen wollen.

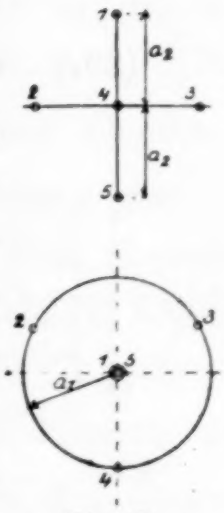


Fig. 7.

§ 2. Gleichgewichts- und Stabilitätsuntersuchungen für Systeme von Elektronen mit einem Ring und zwei Polen ($n = 1 + m + 1$).

Benutzen wir die Bezeichnungen der Figur 8, so lauten die beiden Gleichgewichtsgleichungen folgendermaßen:

$$(38.)\qquad \text{(a.)}\quad \frac{\nu}{b^3} = \frac{S_m}{4a_1^3} + \frac{2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}^3},$$

$$\text{(b.)}\quad \frac{\nu}{b^3} = \frac{1}{4a_2^3} + \frac{m}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}^3},$$

wobei S_m die früher in (2.) gekennzeichnete Bedeutung haben soll. Daraus findet man

$$(39.)\qquad \text{(a.)}\quad \frac{S_m}{4a_1^3} - \frac{1}{4a_2^3} = \frac{m-2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}^3},$$

$$\text{(b.)}\quad (m-2)\frac{\nu}{b^3} = \frac{m \cdot S_m}{4a_1^3} - \frac{1}{2a_2^3}.$$

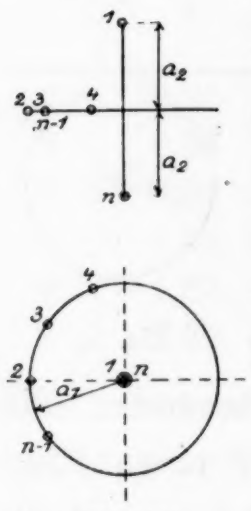


Fig. 8.

Die Werte von S_m für $m = 2, 3, 4, 5, 6$, haben wir bereits oben angegeben. Wir brauchen bloß eine näherungsweise Lösung nach a_1 und a_2 der Gleichungen (39.). Wir probieren den Ansatz $a_2 = a_1 + \varepsilon$, wobei ε als sehr kleine Größe behandelt wird, deren höhere Potenzen man vernachlässigen kann, sodaß

$$\frac{1}{4a_2^3} = \frac{1}{4(a_1+\varepsilon)^3} = \frac{1}{4a_1^3} - \frac{3\varepsilon}{4a_1^4},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}^3} = (2a_1^2 + 2a_1\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}a_1^3} - \frac{3\varepsilon}{4\sqrt{2}a_1^4}.$$

Diese Werte setze ich in (39a.) ein:

$$\frac{S_m}{4a_1^3} - \frac{1}{4a_1^3} + \frac{3\varepsilon}{4a_1^4} = \frac{m-2}{2\sqrt{2}a_1^3} - \frac{3(m-2)\varepsilon}{4\sqrt{2}a_1^4},$$

oder

$$\frac{\varepsilon}{a_1}\left(\frac{3}{4} + \frac{3(m-2)}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{m-2}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} - \frac{S_m}{4}.$$

$$(40.)\qquad \frac{\varepsilon}{a_1} = \frac{2m - 4 + \sqrt{2} - \sqrt{2}S_m}{3\sqrt{2} + 3m - 6}.$$

Nur wenn diese Größe $\frac{\varepsilon}{a_1}$ wirklich sehr klein ist, ist überhaupt die Entwicklung nach ε gestattet. Wenn dies jedoch der Fall ist, so findet man mittels (39b.) a_1 und a_2. Wir wollen für die verschiedenen Werte von m das zugehörige $\frac{\varepsilon}{a_1}$ nach (40.) berechnen und zusehen, ob $\frac{\varepsilon}{a_1}$ wirklich, wie gefordert, sehr klein ist, sodaß man die Quadrate vernachlässigen darf. Wir finden:

$$
\begin{aligned}
&\text{für } m=3: && \frac{\varepsilon}{a_1}=0{,}02; && a_2=1{,}02\,a_1.\\
&m=4: && \frac{\varepsilon}{a_1}=0; && a_2=a_1.\\
&m=5: && \frac{\varepsilon}{a_1}=-0{,}028; && a_2=0{,}97\,a_1.\\
&m=6: && \frac{\varepsilon}{a_1}=-0{,}056; && a_2=0{,}94\,a_1.
\end{aligned}
\qquad (41.)
$$

Für $m=3$ ist demnach $a_2=a_1+\varepsilon>a_1$, für $m=4$ ist $a_2=a_1$, da wir hier die Oktaederanordnung vor uns haben, und für $m>4$ ist $a_2<a_1$. Da die Werte von $\frac{\varepsilon}{a_1}$ bis $m=6$ klein sind, sodaß man deren Quadrate vernachlässigen kann, so erhalten wir mittels der Entwicklung nach ε Werte von a_1 und a_2, die alle bis auf zwei Stellen nach dem Komma richtig sind, was für die Stabilitätsuntersuchung die wir nunmehr in Angriff nehmen wollen, vollkommen ausreichend ist.

Von den $3n$ Frequenzen, die wir zu erwarten haben, können wir wieder von vornherein 6 angeben, nämlich die je dreiwertigen $x=\frac{\nu}{b^3}$ und $x=0$, die sich auf die Schwingungen bzw. Drehungen des starr gedachten Systems beziehen. Sehen wir von diesen trivialen Fällen ab, so geht aus der Symmetrie hervor, daß die beiden Pole 1 und n längs ihrer Verbindungslinie schwingen, wenn sie nicht überhaupt in Ruhe bleiben. Dieser letztere Fall, daß 1 und n ruhen, während die Ringelektronen schwingen, spielt hier aber gerade die Hauptrolle. Wir werden nämlich jetzt beweisen, daß alle Hauptschwingungen, die wir im vorigen Paragraphen beim isolierten Ring kennen gelernt haben, hier bei ruhenden Polen 1 und n wieder als Hauptschwingungen auftreten, abgesehen von einigen selbstverständlichen Ausnahmen. Zu dem Zweck gehen wir auf die Gleichungen zurück, die in § 1 für das Elektron 0 des Einzelringes abgeleitet wurden. Sie werden natürlich in unserem Fall mit geringen Änderungen, mit denen wir uns weiter unten näher beschäftigen wollen, ebenso lauten, wenn wir nur statt a die neue Bezeichnung a_1 einsetzen, und außerdem bedenken, daß wegen der Anwesenheit der Pole 1 und n, deren Verrückungen längs der z-Achse mit z_1 bzw. z_n bezeichnet werden sollen, in jeder der Gleichungen (14.) links vom Gleichheitszeichen noch Ausdrücke mit z_1 und z_n als Faktoren auftreten. Setzen wir nun $z_1=0$ und $z_n=0$, so erhalten wir im wesentlichen die Gleichungen (14.). Da wir aber außer diesen Gleichungen hier noch

weitere zwei Gleichungen brauchen, die sich auf die Bewegung der Pole 1 und n beziehen, so ist der Ansatz $z_1 = 0$ und $z_n = 0$ erst dann gerechtfertigt, wenn dadurch auch diese beiden Gleichungen befriedigt werden. Zu dem Zweck ist es nötig, hier die auf Pol 1 und n bezüglichen Bewegungsgleichungen anzuschreiben. Ist z_1 die Verschiebung von Pol 1 längs der z-Achse, so lautet für Pol 1 die Gleichung:

$$(42.)\quad -mn^2 z_1 - z_1\left(\frac{m}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}^3} - \frac{3a_2^2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}^5} - \frac{1}{a_1^3} - \frac{\nu}{b^3}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}^3} - \frac{3a_2^2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}^5}\right)\sum_1^m{}^s z_s + \frac{3a_1 a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}^5}\sum_1^m{}^s \varrho_s - \frac{z_n}{a_2^3} = 0.$$

Dabei beziehen sich die Summen $\sum_1^m{}^s z_s$ und $\sum_1^m{}^s \varrho_s$ auf die m Elektronen des Ringes. Eine ganz entsprechende Gleichung erhält man für Pol n; setzt man in (42.) $z_1 = 0$, $z_n = 0$, so ist die Gleichung erfüllt, wenn

$$(43.)\qquad \sum_1^m{}^s z_s = 0 \quad \text{und} \quad \sum_1^m{}^s \varrho_s = 0.$$

Machen wir aber wieder wie in § 1 den Ansatz (23.), so ergibt (43.)

$$(44.)\qquad \sum_1^m{}^s \alpha^s = 0,$$

wobei α Wurzel von $x^m = 1$ ist. Wir haben schon früher gesehen, daß (44.) immer gilt mit der einzigen Ausnahme $\alpha = +1$. Nach den Erfahrungen des § 1 gehören aber zu $\alpha = 1$ zwei verschiedene Schwingungen: nämlich erstens die Drehung des ganzen Ringes in sich mit dem Wert $x = 0$, die wir als trivial bereits ausgeschlossen haben, und zweitens die Schwingung, bei der alle Ringelektronen gleichzeitig nach außen und innen längs ihrer Radien schwingen. In letzterem Falle darf also z_1 und z_n nicht gleich Null gesetzt werden. Es ist aber auch ganz klar, daß sich bei dieser Schwingung des Ringes die beiden Pole beteiligen und daß ferner diese Schwingung sicher stabil ist. Im übrigen führt aber der Ring dieselben Schwingungen aus wie der isolierte Ring von § 1, wobei die Pole 1 und n ruhen. Auch hier sind natürlich dieselben Schwingungen, die wir schon in § 1 als die für Stabilität gefährlichsten erkannt haben, in erster Linie zu prüfen. Also für gerades m ist $\alpha = -1$ zu setzen, für ungerades m $\alpha = -e^{i\frac{\pi}{m}}$. Wir wollen nun die Änderungen berechnen, die infolge der Anwesenheit der Pole 1 und n an den Berechnungen von § 1 anzubringen sind. Nach obigem setzen wir hier von

vornherein $z_1 = z_n = 0$. Eine einfache Rechnung lehrt, daß $\frac{\partial U_2}{\partial \varrho_0}$ gegenüber (10a.) um

$$-\frac{2a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}^3}+2\frac{2a_1^2-a_2^2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}^5}\varrho_0,$$

$\frac{\partial U_2}{\partial z_0}$ gegenüber (10c.) um

$$2z_0\frac{2a_2^2-a_1^2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}^5}$$

vermehrt wird. Dabei ist, wie schon oben bemerkt, in den Formeln (10.) a durch a_1 zu ersetzen, während die Σ von 1 bis $m-1$ zu erstrecken sind, also jetzt m an die Stelle des dortigen n tritt.

Die Stabilitätsbedingung lautet also für die Schwingungen in der Ringebene gemäß (31.) mit den hier nötigen Abänderungen folgendermaßen:

$$(45.)\quad \left(\frac{3S_m}{4a_1^3}+L_k-L_0\right)(N_0-N_k)-M_k^2+\frac{6a_1^2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}^5}>0,$$

während die Stabilitätsbedingung für die Schwingungen parallel der z-Achse nach (36.) hier so lauten muß:

$$(46.)\quad \frac{S_m}{4a_1^3}-P_0+P_k+\frac{6a_2^2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}^5}>0.$$

Um nun für die einzelnen Werte $m=3,4,\ldots$ die Stabilität der Anordnungen für die Schwingungen in der Ringebene zu prüfen, drücken wir nach (41.) a_2 angenähert durch a_1 aus und ersetzen in dem Term $Z=\frac{6a_1^2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}^5}$ von (45.) a_2 durch diesen Wert. Die linke Seite der Ungleichung (45.) ist bis auf den Ausdruck Z in der letzten Kolonne der Tabelle (35.) für die Werte $m=3,4,5,6,7$ berechnet. Für $m=3,4,5$ erhielten wir positive Werte. Da Z positiv ist, so ist die Stabilitätsbedingung (45.) für die Fälle $m=3,4,5$ bewiesen. Dagegen erfordert $m=6$ noch eine nähere Untersuchung, da in diesem Fall nach (35.)

$$(N_0-N_k)\left(\frac{3S_m}{4a_1^3}+L_3-L_0\right)=-\frac{0{,}14}{a_1^3}.$$

Es fragt sich, ob diese negative Größe durch Z aufgehoben wird. Nach (41.) ist für $m=6$ $a_2=0{,}94a_1$, und man sieht auf den ersten Blick, daß $Z>\frac{0{,}14}{a_1^3}$. Damit ist auch die Stabilität des Sechserringes mit 2 Polen für die Schwingungen in seiner Ebene bewiesen. Man könnte nun noch

weiter gehen und die Untersuchung für $m = 7, 8, \ldots$ durchführen. Dies ist jedoch nicht mehr nötig, da wir nunmehr zeigen werden, daß für die Schwingungen parallel der z-Achse nur die Fälle $m = 3, 4, 5$ stabile Anordnungen ergeben, während bereits $m = 6$ eine labile Schwingung aufweist. Wir müssen zu dem Zweck für die verschiedenen Werte von m die linke Seite von (46.) berechnen. Bis auf den Term $T = \frac{6 a_2^2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}^5}$ ist ihr Wert in der letzten Kolonne von Tabelle (37.) für $m = 3, 4, 5, 6, 7$ berechnet; da T positiv ist, so ist für $m = 3$ sicher die Ungleichung (46.) erfüllt. Weil für die Werte $m = 4, 5, 6, 7$ die Tabelle (37.) negative Werte für den ersten Teil der Ungleichung (46.) liefert, so muß jedesmal zuerst der Wert von T berechnet werden, um zu sehen, ob er diese negativen Werte auszugleichen vermag. Nach (41.) ist

$$\text{für } m = 4: \qquad a_2 = a_1;\ T = \frac{6}{4\sqrt{2}\, a_1^3} = \frac{1{,}06}{a_1^3},$$

während nach (37.)

$$\frac{S_m}{4 a_1^3} + P_2 - P_0 = -\frac{0{,}46}{a_1^3}.$$

Folglich ist die Anordnung $m = 4$ für die Schwingungen parallel der z-Achse stabil. Da wir aber oben bereits Stabilität für die übrigen Schwingungen bewiesen haben, so ist damit die vollkommene Stabilität der Oktaederanordnung gezeigt.

$$m = 5: \qquad a_2 = 0{,}97\, a_1;\ T = \frac{1{,}08}{a_1^3},$$

während nach (37.)

$$\frac{S_m}{4 a_1^3} + P_2 - P_0 = -\frac{1{,}05}{a_1^3}.$$

Demnach ist auch die Anordnung $7 = 1 + 5 + 1$ stabil.

$$m = 6: \qquad a_2 = 0{,}94\, a_1;\ T = \frac{1{,}09}{a_1^3},$$

während nach (37.)

$$\frac{S_m}{4 a_1^3} + P_3 - P_0 = -\frac{2{,}42}{a_1^3}.$$

Die Anordnung $8 = 1 + 6 + 1$ ist also labil. Dabei ist die betrachtete labile Schwingung diejenige, bei der von den 6 Ringelektronen die 3 mit geradem Index in dem einen Sinn, die mit ungeradem Index im entgegengesetzten Sinn parallel zur z-Achse schwingen.

Wir sind in diesem Abschnitt schon wesentlich weiter gekommen, als im vorigen, wo wir bloß die Fälle $n = 1, 2, 3$ erledigen konnten. Wir haben die vollständige Stabilität der Anordnung $n = 1 + m + 1$ gefunden für $n = 5, 6, 7$. Dagegen tritt für $8 = 1 + 6 + 1$ Labilität ein. Verfolgen wir aber die labile Schwingung, so führt sie uns auf eine neue Gleichgewichtslage, die man unschwer als die Würfelanordnung erkennt, wenn man nur den Würfel als Doppeltetraeder auffaßt. Wie uns also die im ersten Abschnitt behandelte Anordnung bei $n = 4$ auf das Tetraeder führte, so führt uns die Anordnung dieses Abschnitts auf den Würfel. Wir können von der Würfelanordnung jetzt bloß sagen, daß sie ein Gesamtpotential besitzt, das kleiner ist als das der Anordnung $8 = 1 + 6 + 1$. Dagegen wissen wir noch nichts über die Stabilität der Würfelanordnung. Im Gegenteil werden wir im nächsten Paragraphen zeigen, daß die Würfelanordnung abermals labil ist und erst eine neue labile Schwingung vom Würfel auf die stabile Anordnung von 8 Elektronen führt.

§ 3. Die Stabilitätsuntersuchung der Tetraeder- und Würfelanordnung.

a) Das Tetraeder.

Bevor wir uns der Stabilitätsuntersuchung der Tetraeder- und Würfelanordnung zuwenden, müssen wir uns mit einem mathematischen Hilfsmittel vertraut machen, das uns bei unseren Untersuchungen von großem Werte sein wird, den Tetraederkoordinaten, wie ich sie nennen will.

Den neuen Koordinaten liegt das Tetraederkoordinatensystem zugrunde, ein System von vier Geraden, den Achsen des Systems, die vom Mittelpunkt O eines regulären Tetraeders ausgehend, durch die 4 Ecken des Tetraeders laufen. Die 4 Koordinaten eines Raumpunkts P sind die rechtwinkligen Projektionen der Strecke OP auf die 4 Achsen. Dabei sind die Abschnitte auf den rückwärtigen Verlängerungen der Achse über den Nullpunkt hinaus als negativ zu rechnen. Da bereits die Angabe von 3 Koordinaten den Punkt bestimmt, so muß zwischen den 4 Koordinaten eine Bedingungsgleichung bestehen. Diese lautet, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ die Winkel des Vektors a vom Nullpunkt nach dem Raumpunkt P mit den 4 Achsenrichtungen sind

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 + \cos\alpha_4 = 0. \tag{47.}$$

Aus dieser Beziehung läßt sich mit Hilfe einfacher trigonometrischer Rechnungen die folgende ableiten:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 + \cos^2\alpha_4 = \frac{4}{3}, \tag{48.}$$

die für unsere späteren Ausführungen gleichfalls nötig ist.

Mit Hilfe von (48.) berechnet sich die Länge einer Strecke l aus deren Projektionen $U_1 - U_2$, $V_1 - V_2$, $W_1 - W_2$, $T_1 - T_2$ auf den Achsen zu

$$l = \sqrt{\tfrac{3}{4}\{(U_1 - U_2)^2 + (V_1 - V_2)^2 + (W_1 - W_2)^2 + (T_1 - T_2)^2\}}. \tag{49.}$$

Nimmt man den Punkt P auf einer der Koordinatenachsen an, sodaß also von den vier Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ einer zu Null und die anderen drei gleich ϑ, dem Winkel zwischen zwei Koordinatenachsen werden, so folgt aus (49.)

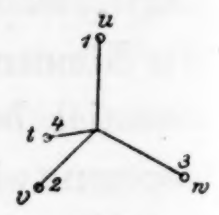


Fig. 9.

$$\cos\vartheta = \mp\tfrac{1}{3},$$

wobei das Minuszeichen für den Winkel zwischen zwei positiven oder zwei negativen Achsenrichtungen gilt, das Pluszeichen für den Winkel zwischen einer positiven und einer negativen Achsenrichtung.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun zur Ableitung der Gleichungen für die Tetraederanordnung von 4 Elektronen übergehen. Im Falle des Gleichgewichts liegen die Elektronen mit den Nummern 1, 2, 3, 4 je auf den Achsen u, v, w, t des Koordinatensystems im Abstand a vom Mittelpunkt. Wir denken uns die vier Elektronen um willkürliche unendlich kleine Strecken

$$u_n, v_n, w_n, t_n \qquad (n=1,2,3,4)$$

aus ihren Gleichgewichtslagen verschoben, sodaß sie in dieser neuen Lage die Koordinaten

$$U_n, V_n, W_n, T_n \qquad (n=1,2,3,4)$$

besitzen. Da jedes Elektron durch 4 Koordinaten bestimmt ist, so müssen wir $4 \cdot 4 = 16$ Stabilitätsgleichungen für das System erwarten. Dazu kommt noch für jedes Elektron eine Nebenbedingung, sodaß wir im ganzen 20 Gleichungen erhalten. Es genügt jedoch, — und das ist der große Vorteil unseres Koordinatensystems — von den 16 Gleichungen 2 abzuleiten. Die übrigen ergeben sich daraus durch zyklische Vertauschung der Koordinaten u, v, w, t, sowie der Indizes 1, 2, 3, 4. Wir wollen für Elektron 1 die Schwingungsgleichung in der u-Richtung und in der v-Richtung ableiten. Bezeichnen wir, um Verwechslungen vorzubeugen, diesmal mit

P_2 das *Newton*sche Potential für Elektron 1, so sind zu den genannten Gleichungen die Ableitungen $\frac{\partial P_2}{\partial U_1}$ und $\frac{\partial P_2}{\partial V_1}$ nötig. Dabei ist

$$(50.)\quad P_2 = \sum_{n=2,3,4} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}\{(U_1-U_n)^2+(V_1-V_n)^2+(W_1-W_n)^2+(T_1-T_n)^2\}}};$$

$$(51.)\quad \frac{\partial P_2}{\partial U_1} = -\sum_{n=2,3,4} \frac{\frac{3}{4}(U_1-U_n)}{\sqrt{\frac{3}{4}\{(U_1-U_n)^2+(V_1-V_n)^2+(W_1-W_n)^2+(T_1-T_n)^2\}}^3};$$

$$(52.)\quad \frac{\partial P_2}{\partial V_1} = -\sum_{n=2,3,4} \frac{\frac{3}{4}(V_1-V_n)}{\sqrt{\frac{3}{4}\{(U_1-U_n)^2+(V_1-V_n)^2+(W_1-W_n)^2+(T_1-T_n)^2\}}^3}.$$

Entwickelt man (siehe Diss. S. 42 f.) diese Ausdrücke nach den unendlich kleinen Größen und behält bloß die ersten Potenzen bei, so erhält man:

$$(53.)\quad \frac{\partial P_2}{\partial U_1} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,c^2} + \frac{6u_1-(u_2+u_3+u_4)+3(v_2+w_3+t_4)}{2\sqrt{6}\,c^3},$$

$$(54.)\quad \frac{\partial P_2}{\partial V_1} = \frac{1}{\sqrt{6}\,c^2} - \frac{3u_1+3v_1-2(v_3+v_4)+v_2-3u_2}{2\sqrt{6}\,c^3}.$$

Um die *Lagrange*schen Gleichungen für Elektron 1 anzuschreiben, müssen wir noch den vom quadratischen Potential herrührenden Bestandteil P_1, sowie die kinetische Energie Q in Betracht ziehen:

$$(55.)\quad P_1 = \frac{3\nu}{8b^3}\left\{(a+u_1)^2+\left(-\frac{a}{3}+v_1\right)^2+\left(-\frac{a}{3}+w_1\right)+\left(-\frac{a}{3}+t_1\right)^2\right\},$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial U_1} = \frac{3\nu}{4b^3}(a+u_1),$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial V_1} = \frac{3\nu}{4b^3}\left(-\frac{a}{3}+v_1\right),$$

$$Q = \frac{m}{2}\cdot\frac{3}{4}(u_1'^2+v_1'^2+w_1'^2+t_1'^2),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u_1'} = \frac{3}{4}mu_1';\quad \frac{\partial Q}{\partial v_1'} = \frac{3}{4}mv_1'.$$

Bedenken wir noch, daß die Nebenbedingung

$$u_n+v_n+w_n+t_n = 0 \qquad (n=1,2,3,4)$$

gilt, so können wir nunmehr die beiden *Lagrange*schen Gleichungen anschreiben:

$$(56\,a.)\quad \frac{3}{4}mu_1''+\frac{3\nu}{4b^3}(a+u_1)-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,c^2}+ \\ +\frac{1}{2\sqrt{6}\,c^3}\{6u_1-(u_2+u_3+u_4)+3(v_2+w_3+t_4)\}+\lambda_1=0,$$

$$(56\,b.)\quad \frac{3}{4}mv_1''+\frac{3\nu}{4b^3}\left(-\frac{a}{3}+v_1\right)+\frac{1}{\sqrt{6}\,c^2}-\frac{3(u_1+v_1)-3u_2+v_2-2(v_3+v_4)}{2\sqrt{6}\,c^3}+\lambda_1=0.$$

Die endlichen Größen in diesen Gleichungen müssen für sich verschwinden, d. h.

$$\frac{3\nu}{4b^3}a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}c^2},$$

oder indem wir wieder $c = \frac{4}{3}a$ einsetzen:

$$\frac{\nu}{b^3}a = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}a^2}. \tag{57.}$$

Dies ist aber gerade die Bedingung des Gleichgewichts für die Tetraederanordnung der 4 Elektronen, aus der sich a berechnet. $\frac{\nu}{b^3}a$ ist nämlich die Anziehung, die ein Elektron durch die positiv geladene Kugel erfährt, während $\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}a^2}$ von der Abstoßung der 3 übrigen Elektronen herrührt.

Wir machen nun sogleich den für kleine Schwingungen üblichen Ansatz

$$u_1 = e^{int}\bar{u}_1;\ v_1 = e^{int}\bar{v}_1;\ \ldots$$

sodaß

$$u_1'' = -n^2 u_1;\ v_1'' = -n^2 v_1;\ \ldots$$

Setzen wir sodann wieder $mn^2 = x$, so schreiben sich die beiden Gleichungen (56.) folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&\text{(a.)}\ \left(x - \frac{\nu}{b^3} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}c^3}\right)u_1 + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}c^3}(u_2+u_3+u_4) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}c^3}(v_2+w_3+t_4) - \frac{4}{3}\lambda_1 = 0,\\
&\text{(b.)}\ \left(x - \frac{\nu}{b^3} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}c^3}\right)v_1 + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}c^3}v_2 - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}c^3}(v_3+v_4) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}c^3}(u_1-u_2) - \frac{4}{3}\lambda_1 = 0.
\end{aligned} \tag{58.}$$

Aus (58a.) und (58b.) lassen sich ohne weiteres alle übrigen Gleichungen ableiten, und zwar zeigen den Bau von (58a.) vier Gleichungen, den von (58b.) zwölf Gleichungen, sodaß wir tatsächlich im Besitze der 16 Gleichungen sind. Dazu treten dann noch weitere vier Gleichungen

$$u_n + v_n + w_n + t_n = 0. \qquad (n=1,2,3,4)$$

Um ein klareres Bild von den 20 Gleichungen zu erhalten, wollen wir die fünf Gleichungen, die sich auf Elektron 1 beziehen, anschreiben und

$$-\tfrac{3}{4}\lambda_n = \mu_n$$

setzen:

$$\text{(59.)}\ \text{(a.)}\ \left(x - \frac{\nu}{b^3} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}c^3}\right)u_1 + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}c^3}(u_2+u_3+u_4) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}c^3}(v_2+w_3+t_4) + \mu_1 = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\text{(b.)}\ \Big(x-\frac{v}{b^3}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\,c^3}\Big)v_1+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}\,c^3}v_2-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}\,c^3}(v_3+v_4)+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\,c^3}(u_1-u_2)+\mu_1=0,\\
(59.)\quad &\text{(c.)}\ \Big(x-\frac{v}{b^3}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\,c^3}\Big)w_1+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}\,c^3}w_3-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}\,c^3}(w_4+w_2)+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\,c^3}(u_1-u_3)+\mu_1=0,\\
&\text{(d.)}\ \Big(x-\frac{v}{b^3}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\,c^3}\Big)t_1+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}\,c^3}t_4-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}\,c^3}(t_2+t_3)+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\,c^3}(u_1-u_4)+\mu_1=0,\\
&\text{(e.)}\ u_1+v_1+w_1+t_1=0.
\end{aligned}
$$

Jeder dieser 5 Gleichungen können wir 3 weitere zuordnen, indem wir u, v, w, t, sowie deren Indizes $1, 2, 3, 4$ zyklisch vertauschen, sodaß wir damit alle 20 Gleichungen erhalten. Bei dieser zyklischen Vertauschung wird aus u_1 der Reihe nach v_2, w_3, t_4; aus v_1: w_2, t_3, u_4, aus w_3: t_4, u_1, v_2; usw. Würden wir nun den Ansatz machen

$$
\begin{aligned}
&u_1=u_1;\quad v_2=\alpha u_1;\quad w_3=\alpha^2 u_1;\quad t_4=\alpha^3 u_1,\\
&v_1=v_1;\quad w_2=\alpha v_1;\quad t_3=\alpha^2 v_1;\quad u_4=\alpha^3 v_1,\\
&w_1=w_1;\quad t_2=\alpha w_1;\quad u_3=\alpha^2 w_1;\quad v_4=\alpha^3 w_1,\qquad \text{usw.},\\
&\mu_1=\mu_1;\quad \mu_2=\alpha\mu_1;\quad \mu_3=\alpha^2\mu_1;\quad \mu_4=\alpha^3\mu_1,
\end{aligned}
\qquad (60.)
$$

$$\text{wobei}\quad \alpha^4=1,$$

so würden sich die 4 Gleichungen (59a.) nur um einen Faktor α^m unterscheiden, den man aber weglassen darf; dasselbe gilt von den übrigen Gleichungen. Durch den Ansatz (60.), der (23.) ganz analog ist, haben wir also die 20 Gleichungen mit 20 Unbekannten auf 5 Gleichungen mit 5 Unbekannten reduziert. Als Unbekannte wollen wir etwa $u_1, v_1, w_1, t_1, \mu_1$ beibehalten, während sich alle übrigen durch diese mittels α nach (60.) ausdrücken lassen. Dabei ist α eine der 4 Wurzeln der Gleichung $x^4=1$.

Unsere obigen 5 Gleichungen (59.) lauten in den Unbekannten $u_1, v_1, w_1, t_1, \mu_1$, folgendermaßen, wobei wir die Abkürzung

$$A=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}\,c^3}=\frac{3\sqrt{3}}{32\sqrt{2}\,a^3} \qquad (61.)$$

benutzen wollen:

$$
\begin{aligned}
&\text{(a.)}\ \Big(x-\frac{v}{b^3}-6A-3A(\alpha+\alpha^2+\alpha^3)\Big)u_1+A\alpha^3 v_1+A\alpha^2 w_1+A\alpha t_1+\mu_1=0,\\
&\text{(b.)}\ (3A+A\alpha)u_1+\Big(x-\frac{v}{b^3}+3A\Big)v_1-2A\alpha^3 w_1-(3A\alpha+2A\alpha^3)t_1+\mu_1=0,\\
(62.)\quad &\text{(c.)}\ (3A+A\alpha^2)u_1-2A\alpha v_1+\Big(x-\frac{v}{b^3}+3A-3A\alpha^2\Big)w_1-2A\alpha^3 t_1+\mu_1=0,\\
&\text{(d.)}\ (3A+A\alpha^3)u_1-(3A\alpha^3+2A\alpha^2)v_1-2A\alpha w_1+\Big(x-\frac{v}{b^3}+3A\Big)t_1+\mu_1=0,\\
&\text{(e.)}\quad u_1+v_1+w_1+t_1=0.
\end{aligned}
$$

Wir setzen in diese Gleichungen nacheinander für α die Wurzeln von $x^4 = 1$ ein; also

$$\alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = -1; \quad \alpha_3 = i; \quad \alpha_4 = -i$$

und gehen jedesmal in der üblichen Art und Weise vor, daß wir die Determinante 5-ten Grades der Koeffizienten der 5 Gleichungen Null setzen. Durch Ausrechnen fand ich folgende Werte für x:

(63.)

$\alpha = +1$	$3\frac{\nu}{b^3}$;	$\frac{3\nu}{4b^3}$;	0.
-1	$\frac{\nu}{b^3}$;	$\frac{3\nu}{2b^3}$;	$\frac{3\nu}{4b^3}$.
$\pm i$	$\frac{\nu}{b^3}$;	$\frac{3\nu}{2b^3}$;	0.

Es ist bemerkenswert, daß für $\alpha = +i$ dieselben Werte für die Frequenzen resultieren wie für $\alpha = -i$. Die Werte Null und $\frac{\nu}{b^3}$ kommen dreimal vor, wie von vornherein zu erwarten war; sie entsprechen den Drehungen bzw. den drei Schwingungen des Systems als starrer Körper für drei zu einander senkrechte Achsen. Außerdem treten noch die Werte $\frac{3\nu}{b^3}$ einmal, $\frac{3\nu}{4b^3}$ zweimal und $\frac{3\nu}{2b^3}$ dreimal auf. Der größte der auftretenden Werte $\frac{3\nu}{b^3}$ entspricht der pulsierenden Schwingung des Systems, bei der alle Elektronen längs ihrer Radien mit gleichen Ausschlägen schwingen. Um die zu den verschiedenen Frequenzen gehörigen Schwingungen des Systems zu erhalten, muß man nur die Werte für x und α in die obigen Gleichungen einsetzen. Man erhält dadurch 5 lineare Gleichungen mit 5 Unbekannten $u_1, v_1, w_1, t_1, \mu_1$, deren Lösung die gesuchte Schwingung liefert. Führt man dies für alle Werte x und α aus, so erhält man 12 Schwingungen. Da wir gerade 12 Hauptschwingungen erwarten müssen, den 12 Freiheitsgraden des Systems entsprechend, so ist damit die Aufgabe vollkommen gelöst. Daß die zu mehreren verschiedenen Schwingungen gehörigen Frequenzen gleich sind, ist natürlich Folge der Symmetrie der Anordnung. Da unter den Werten x der Tabelle (63.) kein negativer Wert und Null gerade bloß dreimal, wie nötig, auftritt, so ist damit die Stabilität der 4 Elektronen an den Ecken eines Tetraeders bewiesen.

Man könnte glauben, daß 5 Elektronen eine stabile Lage haben müssen, bei der 4 die Ecken eines regulären Tetraeders ausmachen, während

das fünfte im Mittelpunkt der Kugel sich befindet. Man kann jedoch beweisen, daß diese Anordnung labil ist, wie ja schon zu vermuten ist, da wir in § 2 die stabile Lage von 5 Elektronen $5 = 1 + 3 + 1$ gefunden haben. Wir wollen uns hier nicht mit diesem Beweise aufhalten, sondern nur noch eine Bemerkung bezüglich der beiden Gleichgewichtslagen von 5 Elektronen, von denen oben die Rede war, hinzufügen. Nach Hilfssatz 2 kann man das Gesamtpotential für beide Anordnungen berechnen. Wie zu erwarten ist, zeigt es sich, daß das Potential für die Anordnung $5 = 1 + 3 + 1$ kleiner ist als das zur Tetraederanordnung der 5 Elektronen gehörige Potential.

b) Der Würfel.

Die in § 2 untersuchten Anordnungen führten schließlich auf die labile Anordnung $8 = 1 + 6 + 1$, deren labile Schwingung, wie wir dort erkannt haben, der Würfelanordnung der 8 Elektronen zuzustreben scheint. Wir wollen nun dazu übergehen, die Stabilitätsuntersuchung für die Würfelanordnung in Angriff zu nehmen. Zu diesem Zweck ist es von Vorteil, den Würfel als Doppeltetraeder aufzufassen. Wie es nebenstehende Figur 10 zeigt, ist das erste Tetraeder 1 2 3 4, das zweite 1′ 2′ 3′ 4′. Wir wenden natürlich wieder Tetraederkoordinaten u, v, w, t, an. Auch hier genügt es, zwei Gleichungen etwa für die Schwingungen von 1 parallel der u- und der v-Achse wie beim Tetraeder abzuleiten. Durch zyklische Vertauschung von u, v, w, t und der Indizes $1, 2, 3, 4$ erhält man daraus alle Schwingungsgleichungen für die 4 Elektronen des ersten Tetraeders und unter Beachtung, daß die Elektronen des zweiten Tetraeders 1′ 2′ 3′ 4′ und die des ersten reziprok liegen, kann man aus den beiden Gleichungen für Elektron 1 auch alle auf $1', 2', 3', 4'$ bezüglichen Gleichungen ableiten. Wir haben für jedes Elektron vier Schwingungsgleichungen und eine Bedingungsgleichung zu erwarten, im ganzen also $8 \cdot 5 = 40$ Gleichungen.

Fig. 10.

Was nun die Ableitung der beiden Schwingungsgleichungen für Elektron 1 betrifft, so handelt es sich vor allem wieder um die Aufstellung des *Newton*schen Potentials P_2 für Elektron 1, herrührend von allen übrigen 7 Elektronen, sowie um die Entwicklung der Ausdrücke $\frac{\partial P_2}{\partial U_1}$ und $\frac{\partial P_2}{\partial V_1}$ nach den ersten Potenzen der unendlich kleinen Größen. Wir können

in diesen Entwicklungen ohne weiteres die für die Tetraederanordnung gewonnenen Resultate übernehmen und brauchen die Formeln (53.) und (54.) für $\frac{\partial P_2}{\partial U_1}$ und $\frac{\partial P_2}{\partial V_1}$ nur noch um Ausdrücke zu ergänzen, die von den Elektronen $1', 2', 3', 4'$ herrühren. Da diese Rechnungen ganz analog denen für die Tetraederanordnung angestellten sind, so will ich sie hier übergehen und bloß als Resultat die beiden auf Elektron 1 bezüglichen Gleichungen anführen; dabei ist wieder $m n^2 = x$; $\frac{4}{3} a = c$ gesetzt:

(64.)

(a.)
$$\left(\frac{3}{4} x - \frac{3\nu}{4 b^3} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\, c^3} - \frac{4}{9 c^3}\right) u_1 + \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}\, c^3} \{u_2 + u_3 + u_4 + 2\sqrt{2}\,(u_{2'} + u_{3'} + u_{4'})\}$$
$$- \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\, c^3} \{(v_2 + w_3 + t_4 - 2\sqrt{2}\,(v_{2'} + w_{3'} + t_{4'})\} + \frac{4}{9 c^3} u_{1'} + \lambda = 0, \qquad (65.)$$

(b.)
$$\left(\frac{3}{4} x - \frac{3\nu}{4 b^3} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\, c^3} - \frac{2}{9 c^3}\right) v_1 + \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}\, c^3} \{v_1 - 2(v_3 + v_4)\} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\, c^3} (u_1 - v_2)$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{c} (u_{2'} + w_{4'} + t_{3'}) + \frac{\sqrt{3}}{3 c^3} (v_{2'} + v_{3'} + v_{4'}) - \frac{2}{9 c^3} (- v_{1'} + u_1 - u_{1'}) + \lambda = 0.$$

Wir sehen, daß die beiden Gleichungen gegenüber den für das Tetraeder abgeleiteten (58 a.) und (58 b.) wesentlich komplizierter geworden sind.

Vor allen Dingen liegt uns daran, die Anzahl der Gleichungen etwa wieder durch einen ähnlichen Ansatz wie beim Tetraeder zu reduzieren. Wir werden auch hierbei den Aufbau des Würfels aus 2 Tetraedern zum Ausdruck bringen. Wir beziehen nämlich die unendlich kleinen Verschiebungen der 4 Elektronen jedes der beiden Tetraeder mit Hülfe der Wurzeln α der Gleichung $x^4 = 1$ so aufeinander, wie wir es bereits beim einzelnen Tetraeder getan haben; außerdem setzen wir die Verschiebungen der Elektronen $1, 2, 3, 4$ und $1', 2', 3', 4'$ gegenseitig in Beziehung mittels eines Faktors β, der Wurzel der Gleichung $x^2 = 1$ ist, indem wir die Verschiebungen $u_{1'}, u_{2'}, v_{3'}, \ldots$ der Elektronen des zweiten Tetraeders aus den entsprechenden $u_1, u_2, v_3, \ldots$ des ersten durch Hinzufügen des Faktors β erhalten. Dadurch gelingt es tatsächlich, die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten von 40 auf 5 zu reduzieren, in denen noch die Parameter α und β auftreten. Da α und β gerade 8 verschiedene Kombinationen zulassen, so kommen wieder die $8 \cdot 5 = 40$ Gleichungen zustande. Die 5 Gleichungen, von denen sich die ersten 4 aus (64 a.) und (64 b.) ableiten lassen, während die fünfte die bekannte Bedingungs-

gleichung unseres Koordinatensystems ist, lauten folgendermaßen, wenn wieder $u_1, v_1, w_1, t_1, \mu_1$ als die Unbekannten beibehalten werden:

$$\text{(a.)}\quad \Big(\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\frac{\nu}{b^3}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}c^3}-\frac{4}{9c^3}\Big)u_1+\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}c^3}\{\alpha t_1+\alpha^2 w_1+\alpha^3 v_1+2\sqrt{2}\beta(\alpha t_1+\alpha^2 w_1+\alpha_3 v_1)\}$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}c^3}u_1\{\alpha+\alpha^2+\alpha^3-2\sqrt{2}\beta(\alpha+\alpha^2+\alpha^3)\}-\frac{4}{9c^3}\beta u_1+\mu_1=0,$$

$$\text{(b.)}\quad \Big(\frac{3}{4}x-\frac{3\nu}{4b^3}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}c^3}-\frac{2}{9c^3}\Big)v_1+\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}c^3}(\alpha u_1-2\alpha^2 t_1-2\alpha^3 w_1)+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}c^3}(u_1-\alpha t_1)$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{c^3}\beta(\alpha t_1+\alpha^3 t_1+\alpha^2 v_1)+\frac{\sqrt{3}}{3c^3}\beta(\alpha u_1+\alpha^2 t_1+\alpha^3 w_1)-\frac{2}{9c^3}(u_1-\beta u_1-\beta v_1)+\mu_1=0,$$

(65.)

$$\text{(c.)}\quad \Big(\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\frac{\nu}{b^3}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}c^3}-\frac{2}{9c^3}\Big)w_1+\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}c^3}(\alpha^2 u_1-2\alpha v_1-2\alpha^3 t_1)+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}c^3}(u_1-\alpha^2 w_1)$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{c^3}\beta w_1(\alpha+\alpha^2+\alpha^3)+\frac{\sqrt{3}}{3c^3}\beta(\alpha v_1+\alpha^2 u_1+\alpha^3 t_1)-\frac{2}{9c^3}(u_1-\beta u_1-\beta w_1)+\mu_1=0,$$

$$\text{(d.)}\quad \Big(\frac{3}{4}x-\frac{3\nu}{4b^3}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}c^3}-\frac{2}{9c^3}\Big)t_1+\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}c^3}(\alpha^3 u_1-2\alpha w_1-2\alpha^2 v_1)+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}c^3}(u_1-\alpha^3 v_1)$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{c^3}\beta(\alpha^2 t_1+\alpha v_1+\alpha^3 v_1)+\frac{\sqrt{3}}{3c^3}\beta(\alpha w_1+\alpha^2 v_1+\alpha^3 u_1)-\frac{2}{9c^3}(u_1-\beta u_1-\beta t_1)+\mu_1=0,$$

$$\text{(e.)}\quad u_1+v_1+w_1+t_1=0.$$

Wie nun die Rechnung weiter zu gehen hat, liegt auf der Hand. Wir setzen die Determinante der 5 Gleichungen gleich Null und berechnen für die 8 verschiedenen Kombinationen von α und β die Wurzeln x dieser Gleichungen. Diese Gleichungen sind jedesmal vom dritten Grade in x, da x bloß in der Hauptdiagonale auftritt und das letzte Glied derselben Null ist. Infolgedessen erhalten wir $8\cdot 3=24$ Werte. Im folgenden sind die Werte von x für $\alpha=1;\ \beta=1$ und für $\alpha=-1;\ \beta=1$ angegeben:

(66.)
$$\alpha=1;\ \beta=1:\quad \frac{2{,}85}{a^3};\ -\frac{0{,}36}{a^3};\ \frac{1{,}70}{a^3};$$
$$\alpha=-1;\ \beta=1:\quad \frac{\nu}{b^3};\ \frac{1{,}38}{a^3};\ -\frac{0{,}36}{a^3}.$$

Dabei ist

(67.)
$$\frac{\nu}{b^3}=\frac{1}{a^3}\Big(\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\Big)=\frac{2{,}47}{a^3},$$

wie aus einer einfachen Gleichgewichtsbetrachtung für ein Elektron des Würfels resultiert, wenn wieder mit a der Abstand des Elektrons vom Kugelmittelpunkt bezeichnet wird. Das Wesentliche an (66.) ist, daß auch

ein negativer Wert für x auftritt, nämlich $x = -\frac{0{,}36}{a^3}$, sowohl bei $\alpha = +1$; $\beta = +1$ als bei $a = -1$; $\beta = +1$. Das heißt aber: die Würfelanordnung der 8 Elektronen ist labil. Übrigens ist $x = -\frac{0{,}36}{a^3}$ der einzige negative Wert von x, der überhaupt beim Würfel auftritt. Es ist nun leicht, zu diesem negativen Wert x die zugehörige labile Schwingung des Würfels zu finden. Es zeigt sich (siehe Diss. S. 51 f.), daß dabei die Würfelanordnung der 8 Elektronen in eine Anordnung übergeht wie sie in Fig. 11 angegeben ist. Es sind zwei Ringe zu je 4 Elektronen, die kreuzweise übereinander liegen. Wir wollen diese Art der gegenseitigen Lage der beiden Ringe als *verschränkt* bezeichnen.

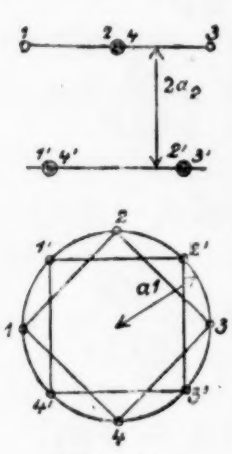


Fig. 11.

Es ist interessant, daß wir nun wieder auf Ringanordnungen geführt werden. Wie früher, so werden wir auch hier zur besseren Verständigung für derartige Gleichgewichtsanordnungen symbolische Schreibweise einführen. Die vorliegende soll charakterisiert werden durch $8 = 4 + 4$; allgemein durch $n = m + m$. Tritt noch ein Elektron in der Mitte hinzu, so soll das durch $n = m + 1 + m$ dargestellt werden, treten 2 Elektronen als Pole oben und unten hinzu, durch $n = 1 + m + m + 1$, und schließlich im Fall von 3 Polen, je einem Pol oben, unten und in der Mitte, durch $n = 1 + m + 1 + m + 1$.

§ 4. Stabilitätsuntersuchung der Anordnungen mit Doppelring.

Wir sind im vorigen Paragraphen von der labilen Würfelanordnung mit 8 Elektronen zu der Anordnung in 2 Ringen $8 = 4 + 4$ geführt worden (s. Figur 11.). Wir wollen in diesem Abschnitt die Stabilitätsuntersuchung des Doppelringes $n = m + m$ allgemein durchführen. Zuvor wollen wir uns über die Symmetrieverhältnisse der Anordnung Rechenschaft geben. Die z-Achse, die Verbindungslinie der Mitten beider Ringe, ist eine m-zählige Symmetrieachse; doch ist damit die Symmetrie der Anordnung noch nicht vollständig beschrieben. Es existieren senkrecht zu dieser m durch den Mittelpunkt gehende zweizählige Achsen, indem nämlich das System durch Drehungen um 180° um diese Achsen zur Deckung gebracht werden kann. Jedoch wollen wir diese Symmetrie vorläufig nicht weiter ausnutzen.

Nachträglich läßt sich dann leicht zeigen, daß diese Symmetrie unsere Aufgabe noch wesentlich vereinfacht.

Wenden wir uns nun zur Aufstellung der *Lagrange*schen Gleichung für kleine Schwingungen, so handelt es sich vor allen Dingen wieder um den Ausdruck für das *Newton*sche Potential U_2 sowie dessen Differentialquotienten. Dabei zeichnen wir wie in § 1 das Elektron, für welches U_2 gebildet wird, durch den Index 0 aus. Soweit U_2 von den Elektronen desselben Ringes herrührt, können wir die Entwicklungen des ersten Paragraphen einfach übernehmen. Diesen Bestandteil des Potentials U_2 wollen wir mit $U_{2\mathrm{I}}$ bezeichnen, wobei der Index I bedeuten soll, daß dieser Teil von den $m-1$ übrigen Elektronen des Ringes I herrührt, dem Elektron 0 auch angehört. Im Gegensatz hierzu soll $U_{2\mathrm{II}}$ der von den m Elektronen des Ringes II herrührende Bestandteil von U_2 bedeuten; sodaß

$$U_2 = U_{2\mathrm{I}} + U_{2\mathrm{II}}.$$

An dieser Stelle möchte ich sogleich auf einen Unterschied in den Summen in $U_{2\mathrm{I}}$ und $U_{2\mathrm{II}}$ aufmerksam machen. In $U_{2\mathrm{I}}$ gehen die Summen von 1 bis $m-1$ über die $m-1$ übrigen Elektronen des Ringes I, in $U_{2\mathrm{II}}$ von 0 bis $m-1$ über die m Elektronen des Ringes II.

Wir numerieren die Elektronen des Ringes I mit $0, 1, \ldots m-1$, die des Ringes II mit $0', 1', 2', \ldots (m-1)'$, derart, daß bei einer Projektion beider Ringe auf eine Ebene senkrecht zur z-Achse auf das Elektron k des ersten Ringes das Elektron k' des zweiten Ringes folgt. Die unendlich kleinen Verschiebungen bezeichnen wir wie früher mit ϱ_k, $a\varphi_k$, z_k bzw. $\varrho_{k'}$, $a\varphi_{k'}$, $z_{k'}$, wobei z_k und $z_{k'}$ nach verschiedenen Seiten, nämlich für beide Ringe nach außen hin, positiv gerechnet werden sollen. Nach diesen Erläuterungen können wir $U_{2\mathrm{II}}$ für Elektron 0 anschreiben:

$$(68.)\quad U_{2\mathrm{II}} = \sum_{0'}^{(m-1)'{}'} \frac{1}{\sqrt{(2a_2+z_0+z_{s'})^2+(a_1+\varrho_0)^2+(a_1+\varrho_{s'})^2-2(a_1+\varrho_0)(a_1+\varrho_{s'})\cos\left[\frac{\pi}{m}(2s'+1)+\varphi_{s'}-\varphi_0\right]}}.$$

Die Bedeutung von a_1 und a_2 ist der Figur 11 zu entnehmen. Bilden wir gleich die Ableitung von $U_{2\mathrm{II}}$ nach ϱ_0, z_0 und φ_0:

$$\frac{\partial U_{2\mathrm{II}}}{\partial \varrho_0} = -\sum_{0'}^{(m-1)'{}'} \frac{a_1+\varrho_0-(a_1+\varrho_{s'})\cos\left[\frac{\pi}{m}(2s'+1)+\varphi_{s'}-\varphi_0\right]}{\sqrt{(2a_2+z_0+z_{s'})^2+(a_1+\varrho_0)^2+(a_1+\varrho_{s'})^2-2(a_1+\varrho_0)(a_1+\varrho_{s'})\cos\left[\frac{\pi}{m}(2s'+1)+\varphi_{s'}-\varphi_0\right]}^3},$$

$$\frac{U_{2\,\mathrm{II}}}{\partial z_0} = -\sum_{0'}^{(m-1)'} \frac{2a_2 + z_0 + z_{s'}}{\sqrt{(2a_2+z_0+z_{s'})^2+(a_1+\varrho_0)^2+(a_1+\varrho_{s'})^2-2(a_1+\varrho_0)(a_1+\varrho_{s'})\cos\left[\frac{\pi}{m}(2s'+1)+\varphi_{s'}-\varphi_0\right]}^{3}},$$

$$\frac{U_{2\,\mathrm{II}}}{\partial \varphi_0} = \sum_{0'}^{(m-1)'} \frac{(a_1+\varrho_0)(a_1+\varrho_{s'})\sin\left[\frac{\pi}{m}(2s'+1)+\varphi_{s'}-\varphi_0\right]}{\sqrt{(2a_2+z_0+z_{s'})^2+(a_1+\varrho_0)^2+(a_1+\varrho_{s'})^2-2(a_1+\varrho_0)(a_1+\varrho_{s'})\cos\left[\frac{\pi}{m}(2s'+1)+\varphi_{s'}-\varphi_0\right]}^{3}}.$$

Wie früher entwickeln wir wieder diese Ausdrücke nach Potenzen der unendlich kleinen Größen und beschränken uns dabei auf die ersten Potenzen. Mit Hilfe der Abkürzung

$$\frac{\pi}{2m}(2s'+1) = \psi_{s'}. \tag{69.}$$

ist das Resultat der Rechnung folgendes:

$$\frac{\partial U_{2\,\mathrm{II}}}{\partial \varrho_0} = -\sum_{0'}^{(m-1)'} \frac{a_1 \sin^2\psi_{s'}}{4\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_{s'}}^3} + \sum_{0'}^{(m-1)'} \left\{ \frac{3a_1^2\sin^4\psi_{s'}\cdot(\varrho_0+\varrho_{s'})+3a_1a_2\sin^2\psi_{s'}(z_0+z_{s'})}{8\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_{s'}}^5} \right.$$
$$\left. + \frac{\left(a_2^2-\frac{a_1^2}{2}\sin^2\psi_{s'}\right)a_1\sin 2\psi_{s'}(-\varphi_{s'}+\varphi_0)}{8\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_{s'}}^5} - \frac{\varrho_0-\varrho_{s'}\cos 2\psi_{s'}}{8\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_{s'}}^3} \right\},$$

$$\frac{\partial U_{2\,\mathrm{II}}}{\partial z_0} = -\sum_{0'}^{(u-1)'} \frac{a_2}{4\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_{s'}}^3} + \sum_{0'}^{(m-1)'} \left\{ \frac{3a_1a_2\sin^2\psi_{s'}(\varrho_0+\varrho_{s'})+3a_2^2(z_0+z_{s'})}{8\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_{s'}}^5} \right.$$
$$\left. - \frac{\frac{3}{2}a_1^2a_2\sin 2\psi_{s'}(-\varphi_{s'}+\varphi_0)}{8\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_{s'}}^5} - \frac{z_0+z_{s'}}{8\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_{s'}}^3} \right\},$$

$$\frac{\partial U_{2\,\mathrm{II}}}{\partial \varphi_0} = \sum_{0'}^{(m-1)'} \frac{\left(a_2^2-\frac{a_1^2}{2}\sin^2\psi_{s'}\right)a_1\sin 2\psi_{s'}\cdot(\varrho_0+\varrho_{s'})-\frac{3}{2}a_1^2a_2\sin 2\psi_{s'}(z_0+z_{s'})}{8\sqrt{a^2+a_1^2\sin^2\psi_{s'}}^5}$$
$$+ \frac{[3a_1^4\sin^2\psi_{s'}\cos^2\psi_{s'}-a_1^2\cos 2\psi_{s'}(a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_{s'})](-\varphi_{s'}+\varphi_0)}{8\sqrt{a^2+a_1^2\sin^2\psi_{s'}}^5}.$$

Aus § 1 Formel (10.) entnehmen wir die Ausdrücke für $\frac{\partial U_{2\,\mathrm{I}}}{\partial \varrho_0}$, $\frac{\partial U_{2\,\mathrm{I}}}{\partial \varphi_0}$ und $\frac{\partial U_{2\,\mathrm{I}}}{\partial z_0}$:

$$\frac{\partial U_{2\,\mathrm{I}}}{\partial \varrho_0} = -\frac{S_m}{4a_1^2} + \varrho_0 A' + \sum_1^{m-1} \varrho_s A_s + a_1 \sum_1^{m-1} \varphi_s B_s;$$

$$\frac{\partial U_{2\,\mathrm{I}}}{\partial z_0} = -Dz_0 + \sum_1^{m-1} D_s z_s; \quad \frac{\partial U_{2\,\mathrm{I}}}{\partial \varphi_0} = -a_1 \sum_1^{m-1} \varrho_s B_s + a_1^2\varphi_0 C - a_1^2 \sum_1^{m-1} \varphi_s C_s.$$

Der bequemeren Schreibweise wegen führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$X=\sum_0^{m-1{}'} X_s=\frac{1}{8}\sum_0^{m-1{}'}\frac{\sin^4\psi_s}{\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_s}^5};\qquad V_s=\frac{1}{8}\frac{\cos 2\psi_s}{\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_s}^3};\qquad \Xi_s=\frac{\left(a_2^2-\frac{a_1^2}{2}\sin^2\psi_s\right)\sin 2\psi_s}{8\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_s}^5};$$

$$Y=\sum_0^{m-1{}'} Y_s=\frac{1}{8}\sum_0^{m-1{}'}\frac{\sin^2\psi_s}{\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_s}^5};\qquad W_s=\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_s}^3};\qquad \mathsf{H}_s=\frac{\frac{3}{2}a_1a_2\sin 2\psi_s}{8\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_s}^5};$$

$$Z=\sum_0^{m-1{}'} Z_s=\frac{1}{8}\sum_0^{m-1{}'}\frac{1}{\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_s)}^5};\qquad \mathsf{Z}_s=\frac{3a_1^2\sin^2\psi_s\cos^2\psi_s-\cos 2\psi_s(a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_s)}{8\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_s}^5};$$

$$\mathsf{Z}=\sum_0^{m-1{}'}\mathsf{Z}_s.$$

Bedenken wir ferner, daß $U_2=U_{2\,\mathrm{I}}+U_{2\,\mathrm{II}}$, so finden wir:

(71.)

$$\text{(a.)}\quad \frac{\partial U_2}{\partial\varrho_0}=-\frac{S_m}{4a_1^2}-\sum_{0'}^{(m-1)'}\frac{a_1\sin^2\psi_{s'}}{4\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_{s'}}^3}+\sum_1^{m-1{}'}A_s\varrho_s+\varrho_0\left\{A'+3a_1^2X-\sum_{0'}^{(m-1)'}W_{s'}\right\}$$
$$+\sum_{0'}^{(m-1)'}(3a_1^2X_{s'}+V_{s'})\varrho_{s'}+3a_1a_2\left(Yz_0+\sum_{0'}^{(m-1)'}Y_{s'}z_{s'}\right)+a\varphi_0\cdot 0-\sum_{0'}^{(m-1)'}\Xi_{s'}\cdot a_1\varphi_{s'}+\sum_1^{m-1{}'}B_sa_1\varphi_s,$$

$$\text{(b.)}\quad \frac{\partial U_2}{\partial z_0}=-\sum_{0'}^{(m-1)'}\frac{a_2}{4\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_{s'}}^3}+3a_1a_2\left(Y\varrho_0+\sum_{0'}^{(m-1)'}Y_{s'}\varrho_{s'}\right)$$
$$+z_0\left(-D+3a_2^2Z-\sum_{0'}^{(m-1)'}W_{s'}\right)+\sum_1^{m-1{}'}D_sz_s+\sum_{0'}^{(m-1)'}(3a_2^2Z_{s'}-W_{s'})z_{s'}+a\varphi_0\cdot 0+\sum_{0'}^{(m-1)'}\mathsf{H}_{s'}a_1\varphi_{s'},$$

$$\text{(c.)}\quad \frac{\partial U_2}{a_1\partial\varphi_0}=\varrho_0\cdot 0-\sum_1^{m-1{}'}B_s\varrho_s+\sum_{0'}^{(m-1)'}\Xi_{s'}\varrho_{s'}+0\cdot z_0-\sum_{0'}^{(m-1)'}\mathsf{H}_{s'}z_{s'}+(C+\mathsf{Z})a_1\varphi_0$$
$$-\sum_{0'}^{(m-1)'}\mathsf{Z}_{s'}a_1\varphi_{s'}-\sum_1^{m-1{}'}C_sa_1\varphi_s.$$

Das quadratische Potential für Elektron 0 beträgt

$$U_1=\frac{\nu}{2b^3}\{(a_1+\varrho_0)^2+(a_2+z_0)^2\},$$

sodaß

(72.)

$$\text{(a.)}\quad \frac{\partial U_1}{\partial\varrho_0}=\frac{\nu}{b^3}(a_1+\varrho_0),\qquad \text{(b.)}\quad \frac{\partial U_1}{\partial z_0}=\frac{\nu}{b^3}(a_2+z_0),\qquad \text{(c.)}\quad \frac{\partial U_1}{\partial\varphi_0}=0.$$

Ferner brauchen wir noch den Ausdruck für die lebendige Kraft T des Elektrons 0:

(73.)
$$T=\frac{m}{2}(\dot\varrho_0^2+\dot z_0^2+a_1^2\dot\varphi_0^2).$$

Aus (71.), (72.), (73.) leiten wir die 3 Bewegungsgleichungen für Elektron 0 ab und setzen sogleich $\ddot\varrho_0=-\mathfrak{n}^2\varrho_0$, $a_1\ddot\varphi_0=-\mathfrak{n}^2a_1\varphi_0$, $\ddot z_0=-\mathfrak{n}^2z_0$ und $m\mathfrak{n}^2=x$. Dabei müssen die endlichen Größen jeder Gleichung und die unendlich kleinen Größen für sich die Gleichung erfüllen. Die erste Bedingung liefert uns folgende Gleichgewichtsgleichungen:

$$(74.)\quad \text{(a.)}\ \frac{\nu}{b^3}a_1 = \frac{S_m}{4a_1^2} + \frac{1}{4}\sum_{0'}^{(m-1)'}\frac{a_1\sin^2\psi_{s'}}{\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_{s'}}^3},$$

$$\text{(b.)}\ \frac{\nu}{b^3}a_2 = \frac{1}{4}\sum_{0'}^{(m-1)'}\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+a_1^2\sin^2\psi_{s'}}^3} = 2a_2\sum_{0'}^{(m-1)'}W_{s'}.$$

Die zweite Bedingung gibt uns die Stabilitätsgleichungen für Elektron 0:

$$\text{(a.)}\ \varrho_0\Big(-x+\frac{\nu}{2b^3}+A'+3a_1^2X\Big)+\sum_1^{m-1}A_s\varrho_s+\sum_{0'}^{(m-1)'}(3a_1^2X_{s'}+V_{s'})\varrho_{s'}$$
$$+3a_1a_2\Big(Yz_0+\sum_{0'}^{(m-1)'}Y_{s'}z_{s'}\Big)+\sum_1^{m-1}B_sa_1\varphi_s-\sum_{0'}^{(m-1)'}\Xi_{s'}a_1\varphi_{s'}=0,$$

$$(75.)\ \text{(b.)}\ 3a_1a_2\Big(Y\varrho_0+\sum_{0'}^{(m-1)'}Y_{s'}\varrho_{s'}\Big)+z_0\Big(-x+\frac{\nu}{2b^3}-D+3a_2^2Z\Big)$$
$$+\sum_1^{m-1}D_sz_s+\sum_{0'}^{(m-1)'}(3a_2^2Z_{s'}-W_{s'})z_{s'}+\sum_{0'}^{(m-1)'}\mathsf{H}_{s'}a_1\varphi_{s'}=0,$$

$$\text{(c.)}\ -\sum_1^{m-1}B_s\varrho_s+\sum_{0'}^{(m-1)'}\Xi_{s'}\varrho_{s'}-\sum_{0'}^{(m-1)'}\mathsf{H}_{s'}z_{s'}$$
$$+(-x+C+\mathsf{Z})a_1\varphi_0-\sum_{0'}^{(m-1)'}\mathsf{Z}_{s'}a_1\varphi_{s'}-\sum_1^{(m-1)}C_sa_1\varphi_s=0.$$

Die Stabilitätsgleichungen für Elektron p des Ringes I erhalten wir aus (75.), indem wir einfach die Indizes der Variabeln um p bzw. p' vermehren, sonst aber alles ungeändert lassen. Nur eines ist dabei zu beachten: Die Indizes der Variabeln können bei dieser Schreibweise größer als $m-1$ werden. In diesem Fall ist natürlich m abzuziehen, sodaß auf $m-1$ Null folgt entsprechend der Numerierung der Elektronen im Ring. Es fehlen noch die Stabilitätsgleichungen für die Elektronen des Ringes II. Diese kann ich auch aus (75.) ohne weiteres ableiten. Sie lauten für Elektron $0'$ folgendermaßen:

$$\text{(a.)}\ \varrho_{0'}\Big(-x+\frac{\nu}{2b^3}+A'+3a_1^2X\Big)+\sum_{1'}^{(m-1)'}A_{s'}\varrho_{s'}+\sum_0^{m-1}(3a_1^2X_s+V_s)\varrho_{s+1}$$
$$+3a_1a_2\Big(Yz_{0'}+\sum_0^{m-1}Y_sz_{s+1}\Big)+\sum_{1'}^{(m-1)'}B_{s'}a_1\varphi_{s'}-\sum_0^{m-1}\Xi_sa_1\varphi_{s+1}=0,$$

$$(76.)\ \text{(b.)}\ 3a_1a_2\Big(Y\varrho_{0'}+\sum_0^{m-1}Y_s\varrho_{s+1}\Big)+z_0\Big(-x+\frac{\nu}{2b^3}-D+3a_2^2Z\Big)$$
$$+\sum_{1'}^{(m-1)'}D_{s'}z_{s'}+\sum_0^{m-1}(3a_2^2Z_s-W_s)z_{s+1}+\sum_0^{m-1}\mathsf{H}_sa_1\varphi_{s+1}=0,$$

$$\text{(c.)}\ -\sum_{1'}^{(m-1)'}B_{s'}\varrho_{s'}+\sum_0^{(m-1)}\Xi_s\varrho_{s+1}-\sum_0^{m-1}\mathsf{H}_sz_{s+1}$$
$$+(-x+C+\mathsf{Z})a_1\varphi_{0'}-\sum_0^{m-1}\mathsf{Z}_sa_1\varphi_{s+1}-\sum_{1'}^{(m-1)'}C_{s'}a_1\varphi_{s'}=0.$$

Dabei kommt die in den Verschiebungen der Elektronen des Ringes I auftretende Vermehrung der Indizes um 1 von der oben besprochenen Numerierung der Ringelektronen, indem nämlich Elektron k' des Ringes II von 0 dieselbe Entfernung hat wie $k+1$ des Ringes I von $0'$. Durch Vermehrung der Indizes der Variabeln um p bzw. p' erhält man aus (76.) die Stabilitätsgleichungen für Elektron p'. Damit haben wir aber alle $3n$ Gleichungen, die für die Stabilitätsuntersuchung der Anordnung erforderlich sind. Wie früher, so gibt auch hier wieder der ähnliche Bau bestimmter Gruppen von je m Gleichungen die Veranlassung zu folgendem Ansatz:

$$
\begin{aligned}
&\varrho_1 = \alpha\varrho_0\,;\ \varrho_2 = \alpha^2\varrho_0\,;\ \ldots\ \varrho_{m-1} = \alpha^{m-1}\varrho_0\,;\\
&\varrho_{1'} = \alpha\varrho_{0'};\ \varrho_{2'} = \alpha^2\varrho_{0'};\ \ldots\ \varrho_{(m-1)'} = \alpha^{m-1}\varrho_{0'};\\
&z_1 = \alpha z_0\,;\ z_2 = \alpha^2 z_0\,;\ \ldots\ z_{m-1} = \alpha^{m-1} z_0\,;\\
&z_{1'} = \alpha z_{0'};\ z_{2'} = \alpha^2 z_{0'};\ \ldots\ z_{(m-1)'} = \alpha^{m-1} z_{0'};\\
&\varphi_1 = \alpha\varphi_0\,;\ \ldots\ \varphi_{m-1} = \alpha^{m-1}\varphi_0\,;\\
&\varphi_{1'} = \alpha\varphi_{0'};\ \ldots\ \varphi_{(m-1)'} = \alpha^{m-1}\varphi_{0'};
\end{aligned}
\tag{77.}
$$

$$
\varrho_{0'} = \alpha^{\frac{1}{2}}\varrho_0;\quad z_{0'} = \alpha^{\frac{1}{2}} z_0;\quad \varphi_{0'} = \alpha^{\frac{1}{2}}\varphi_0. \tag{78.}
$$

Damit haben wir schließlich unser ganzes Problem auf folgende drei Gleichungen gebracht

$$
\begin{aligned}
\text{(a.)}\ &\varrho_0\Big\{-x+\frac{v}{2b^3}+A'+3a_1^2X+\sum_1^{m-1}{}^{s}\alpha^s A_s+\sum_0^{m-1}{}^{s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}(3a_1^2X_s+V_s)\Big\}\\
&+z_0\,3a_1a_2\Big(Y+\sum_0^{m-1}{}^{s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}Y_s\Big)+a_1\varphi_0\Big(\sum_1^{m-1}{}^{s}\alpha^s B_s-\sum_0^{m-1}{}^{s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}\Xi_s\Big)=0,\\
\text{(b.)}\ &\varrho_0\cdot 3a_1a_2\Big(Y+\sum_0^{m-1}{}^{s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}Y_s\Big)+z_0\Big\{-x+\frac{v}{2b^3}-D+3a_2^2Z\\
&+\sum_1^{m-1}{}^{s}\alpha^s D_s+\sum_0^{m-1}{}^{s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}(3a_2^2Z_s-W_s)+a_1\varphi_0\sum_0^{m-1}{}^{s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}\mathsf{H}_s=0,\\
\text{(c.)}\ &\varrho_0\Big(-\sum_1^{m-1}{}^{s}\alpha^s B_s+\sum_0^{m-1}{}^{s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}\Xi_s\Big)-z_0\sum_0^{m-1}{}^{s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}\mathsf{H}_s\\
&+a_1\varphi_0\Big\{-x+C-\sum_1^{m-1}{}^{s}\alpha^s C_s+\mathsf{Z}-\sum_0^{m-1}{}^{s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}\mathsf{Z}_s\Big\}=0.
\end{aligned}
\tag{79.}
$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
\text{(a.)}\quad &M=\frac{v}{b^3}+A'+3a_1^2X+\sum_1^{m-1}{}^{s}\alpha^s A_s-\sum_0^{m-1}{}^{s}W_s,\\
\text{(b.)}\quad &N=\frac{v}{b^3}+3a_2^2Z-D+\sum_1^{m-1}{}^{s}\alpha^s D_s-\sum_0^{m-1}{}^{s}W_s,\\
\text{(c.)}\quad &K=C-\sum_1^{m-1}{}^{s}\alpha^s C_s+\mathsf{Z},
\end{aligned}
\tag{80.}
$$

so nimmt die charakteristische Determinante der Gleichungen (79.) die folgende Gestalt an:

$$(81.)\quad \begin{vmatrix} -x+M+\sum_0^{m-1 s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}(3a_1^2X_s+V_s) & 3a_1a_2\Big(Y+\sum_0^{m-1 s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}Y_s\Big) & \sum_1^{m-1 s}\alpha^s B_s-\sum_0^{m-1 s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}\Xi_s \\ 3a_1a_2\Big(Y+\sum_0^{m-1 s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}Y_s\Big) & -x+N+\sum_0^{m-1 s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}(3a_2^2Z_s-W_s) & +\sum_0^{m-1 s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}\mathsf{H}_s \\ \sum_1^{m-1 s}\alpha^s B_s-\sum_0^{m-1 s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}\Xi_s & \sum_0^{m-1 s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}\mathsf{H}_s & x-K+\sum_0^{m-1 s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}Z_s \end{vmatrix}$$

Diese Determinante hat große Ähnlichkeit mit der Determinante zweiten Grades (25a.), welche für die Schwingungen der Elektronen eines Einzelringes in der Ringebene charakteristisch ist. Auch die vorliegende Determinante ist symmetrisch zur Hauptdiagonale. Trotz des im allgemeinen komplexen Wertes α sind die Koeffizienten der Determinante reell mit Ausnahme der beiden $\sum_1^{m-1 s}\alpha^s B_s - \sum_0^{m-1 s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}\Xi_s$ und $\sum_0^{m-1 s}\alpha^{s+\frac{1}{2}}\mathsf{H}_s$, die rein imaginär sind. Demnach kann man es erreichen, daß für alle Werte α_k die Koeffizienten von ϱ_0 und z_0 in den Gleichungen (79.) reell, die von $a_1\varphi_0$ rein imaginär sind. Ebenso wie früher beim Einzelring liefert Gleichung (81.) für α_k und α_{m-k} denselben Wert x, d. h. aber, dieser Wert x und damit die Frequenz n zählt doppelt und die zugehörigen Schwingungen der Elektronen sind elliptisch oder im speziellen Fall zirkular. Wir haben also hier genau dieselben Überlegungen anzustellen wie in § 1 beim Einzelring. Die einzige Komplikation, die gegenüber dem Früheren hinzukommt, ist der Umstand, daß sich der Schwingungsvorgang nicht in einer Ebene abspielt. Betrachten wir jedoch nur die Projektion der Bewegung der Elektronen auf eine Ebene senkrecht zur z-Achse, so erhalten wir für die Darstellung der Hauptschwingungen der beiden Ringe im wesentlichen dieselben Bilder wie in § 1 (Figur 2, 3, 4, 5). Ebenso wie beim Einzelring scheiden wir hier die Fälle $\alpha = 1$ und außerdem für gerades m $\alpha = -1$ aus. Abgesehen von diesen Fällen sind wieder die zu den übrigen Werten α gehörigen Schwingungen alle elliptisch bzw. zirkular, sodaß also die zugehörigen Frequenzwerte doppelt zählen. $\alpha = 1$ und $\alpha = -1$ sind auch noch insofern ausgezeichnete Fälle, als sich hierbei die Hauptschwingungen der Elektronen reinlich trennen in solche, bei denen sich bloß die φ ändern, während alle ϱ und z Null sind, und solche, bei denen sich bloß diese ändern, während alle φ Null sind. Analytisch liegt dies an der Tatsache, daß für $\alpha = 1$ und $\alpha = -1$

$$\sum_{1}^{m-1 s} \alpha^s B_s = 0; \quad \sum_{0}^{m-1 s} \alpha^{s+\frac{1}{2}} \Xi_s = 0; \quad \sum_{0}^{m-1 s} \alpha^{s+\frac{1}{2}} \mathsf{H}_s = 0.$$

Damit zerfällt aber Gleichung (81.) in zwei Faktoren, von denen der eine

$$x - K + \sum_{0}^{m-1 s} \alpha^{s+\frac{1}{2}} \mathsf{Z}_s = 0$$

sich auf die Schwingungen der Elektronen senkrecht zu den Meridianebenen, d. h. den Ebenen durch die Ruhelage der Elektronen und die z-Achse, bezieht, und zwar für $\alpha = 1$ den Wert $x = 0$ liefert, also zu der Drehung des ganzen Systems gehört, während $\alpha = -1$ die Drehung des einen Ringes im einen und des anderen Ringes im entgegengesetzten Sinn ergibt. Der zweite Faktor von (81.), der bei $\alpha = 1$ und $\alpha = -1$ auftritt, ist vom zweiten Grad in x und gehört zu den Hauptschwingungen, die sich ganz in den Meridianebenen der Elektronen abspielen.

Wir finden demnach große Analogieen zwischen den Hauptschwingungen des Doppelringes und denen des Einzelringes. Es fragt sich jetzt nur noch, ob ebenso wie beim Einzelring auch beim Doppelring die richtige Zahl von Hauptschwingungen, nämlich $3n = 6m$ herauskommt. Es ist zu beachten, daß in $\alpha = e^{k\frac{2i\pi}{m}}$ wegen der in den Summen auftretenden Faktoren $\alpha^{s+\frac{1}{2}}$ k die Werte $0, 1, 2, \ldots (2m-1)$ durchlaufen muß, wodurch die richtige Anzahl von Hauptschwingungen erhalten wird; dabei liefern die Summen mit $\alpha^{s+\frac{1}{2}}$ als Faktoren für $k = \varkappa$ bis aufs Vorzeichen denselben Wert wie für $k = m + \varkappa$, wie man sich leicht überzeugt. Die Rechnung liefert das Resultat, daß $8 = 4 + 4$ stabil, dagegen $10 = 5 + 5$ labil ist (s. Diss. S. 61 ff.).

Besonders hervorzuheben ist folgende Bemerkung, die für später zu besprechende Anordnungen, deren Stabilitätsuntersuchung wegen der umständlichen Rechnungen nicht mehr gelingt, von großer Bedeutung sein wird, indem sie uns auf ein Prinzip hinweist, das anscheinend für stabile Anordnungen allgemeine Gültigkeit besitzt. In § 2 fanden wir als stabile Anordnung von sechs Elektronen das Oktaeder: $6 = 1 + 4 + 1$, wie wir damals schrieben. Die Oktaederanordnung kann aber auch aufgefaßt werden als eine Anordnung nach zwei parallelen Ringen von je 3 Elektronen, die gegenseitig verschränkt liegen, d. h. aber: wir haben im Oktaeder eine Anordnung von demselben Typ vor uns, wie wir ihn in diesem Paragraphen untersucht haben, sodaß wir auch schreiben können: $6 = 3 + 3$.

Das Nämliche gilt von der stabilen Tetraederanordnung von 4 Elektronen, sodaß man auch schreiben kann $4 = 2 + 2$. Unter diesem Gesichtspunkt bekommt der Anordnungstyp $n = m + m$ eine viel größere Bedeutung, indem die stabilen Lagen für 4, 6, 8 Elektronen unter dieses Schema fallen.

§ 5. Stabilitätsuntersuchung der Anordnungen mit Doppelring und 2 Polen.

Wie wir in § 2 gezeigt haben, daß bei festgehaltenen Polen die Elektronen des Einzelringes mit einer einzigen Ausnahme dieselben freien Schwingungen auszuführen vermögen, als wenn die Pole festgehalten wären, so werden wir dasselbe hier vom Doppelring beweisen. Wie in § 2 näher ausgeführt, genügt es, bloß Verschiebungen der beiden Pole, die wir auch hier mit 1 und n bezeichnen wollen, längs der Symmetrieachse, also der z-Achse, anzunehmen. Demnach erhalten wir für 1 und n je eine Bewegungsgleichung, und es ist zu zeigen, daß diese beiden Gleichungen für die Hauptschwingungen der Elektronen des Doppelringes mit $z_1 = 0$ und $z_n = 0$ erfüllt sind. Dabei wollen wir z_1 und z_n nach entgegengesetzten Richtungen, nämlich jedesmal nach außen hin, positiv rechnen. Versuchen wir, die Bewegungsgleichungen für das Ringelektron 0 aufzustellen, wie im vorigen Paragraphen, so können wir für die Ausdrücke $\frac{\partial U_2}{\partial \varrho_0}$, $\frac{\partial U_2}{\partial z_0}$ und $\frac{\partial U_2}{\partial \varphi_0}$ die Gleichungen (71.) benutzen, wenn wir dazu noch einen Ausdruck fügen, der von den beiden Polen 1 und n herrührt. Wir wollen etwa den Teil des *Newton*schen Potentials für Elektron 0, der von 1 und n herrührt, mit $U_{2\,\mathrm{III}}$ bezeichnen, sodaß

$$(82.)\qquad U_{2\,\mathrm{III}} = \frac{1}{\sqrt{(a_1+\varrho_0)^2+(a_3-a_2+z_1-z_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(a_1+\varrho_0)^2+(a_3+a_2+z_n+z_0)^2}}.$$

Daraus erhält man

$$(83.)\quad (a.)\ \frac{\partial U_{2\,\mathrm{III}}}{\partial \varrho_0} = -\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+(a_3-a_2)^2}^3} - \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+(a_3+a_2)^2}^3} - \varrho_0\left\{\frac{(a_3-a_2)^2-2a_1^2}{\sqrt{a_1^2+(a_3-a_2)^2}^5} + \frac{(a_3+a_2)^2-2a_1^2}{\sqrt{a_1^2+(a_3+a_2)^2}^5}\right\} + \frac{3a_1(a_3-a_2)(z_1-z_0)}{\sqrt{a_1^2+(a_3-a_2)^2}^5} + \frac{3a_1(a_3+a_2)(z_n+z_0)}{\sqrt{a_1^2+(a_3+a_2)^2}^5},$$

$$(b.)\ \frac{\partial U_{2\,\mathrm{III}}}{\partial z_0} = \frac{a_3-a_2}{\sqrt{a_1^2+(a_3-a_2)^2}^3} - \frac{a_3+a_2}{\sqrt{a_1^2+(a_3+a_2)^2}^3} + \frac{a_1^2-2(a_3-a_2)^2}{\sqrt{a_1^2+(a_3-a_2)^2}^5}(z_1-z_0) - \frac{a_1^2-2(a_3+a_2)^2}{\sqrt{a_1^2+(a_3+a_2)^2}^5}(z_n+z_0) + 3a_1\varrho_0\left\{\frac{a_3+a_2}{\sqrt{a_1^2+(a_3+a_2)^2}^5} - \frac{a_3-a_2}{\sqrt{a_1^2+(a_3-a_2)^2}^5}\right\}.$$

(83a.) und (83b.) müssen in (71a.) und (71b.) noch eingetragen werden; dann gehen die Gleichgewichtsgleichungen (74.) in folgende über:

$$(84.)\quad \begin{aligned} &(a.)\ \frac{\nu}{b^3}a_1 = \frac{S_m}{4a_1^2} + \frac{1}{4}\sum_{0'}^{(m-1)'} \frac{a_1^2 \sin^2\psi_{s'}}{\sqrt{a_2^2 + a_1^2\sin^2\psi_{s'}}^3} + \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+(a_2-a_2)^2}^3} + \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+(a_3+a_2)^2}^3},\\ &(b.)\ \frac{\nu}{b^3}a_2 = 2a_2\sum_{0'}^{(m-1)'} W_{s'} - \frac{a_3-a_2}{\sqrt{a_1^2+(a_3-a_2)^2}^3} + \frac{a_3+a_2}{\sqrt{a_1^2+(a_3+a_2)^2}^3}, \end{aligned}$$

während die Stabilitätsgleichungen (75.) durch die unendlich kleinen Glieder von (83.) ergänzt werden müssen. Nun brauchen wir aber noch je eine Bewegungsgleichung für die beiden Polelektronen 1 und n. Der Gang der Rechnung ist derselbe, den wir jetzt schon so oft wiederholt haben: wir bilden, um mit Elektron 1 zu beginnen, das *Newton*sche Potential für Pol 1:

$$U_2 = \sum_0^{m-1}{}^{s} \frac{1}{\sqrt{(a_1+\varrho_s)^2+(a_3-a_2+z_1-z_s)^2}} + \sum_{0'}^{(m-1)'} \frac{1}{\sqrt{(a_1+\varrho_{s'})^2+(a_3+a_2+z_1+z_{s'})^2}} + \frac{1}{2a_3+z_1+z_n};$$

bilden sodann die Ableitung nach z_1 und entwickeln diesen Ausdruck. Durch Trennen der endlichen und der unendlich kleinen Größen erhält man 2 Gleichungen: die Gleichgewichtsgleichung

$$(85.)\qquad \frac{\nu}{b^3}a_3 = m\left\{\frac{a_3-a_2}{\sqrt{a_1^2+(a_3-a_2)^2}^3} + \frac{a_3+a_2}{\sqrt{a_1^2+(a_3+a_2)^2}^3}\right\} + \frac{1}{4a_3^2},$$

sowie die folgende Stabilitätsgleichung für Pol 1

$$(86.)\quad \begin{aligned} z_1\left(-x+\frac{\nu}{b^3}\right) &+ \frac{2(a_3-a_2)^2-a_1^2}{\sqrt{a_1^2+(a_3-a_2)^2}^5}\sum_0^{m-1}{}^{s}(z_1-z_s) + \frac{2(a_3+a_2)^2-a_1^2}{\sqrt{a_1^2+(a_3+a_2)^2}^5}\sum_{0'}^{(m-1)'}(z_1+z_{s'})\\ &+ \frac{3a_1(a_3-a_2)}{\sqrt{a_1^2+(a_3-a_2)^2}^5}\sum_0^{m-1}{}^{s}\varrho_s + \frac{3a_1(a_3+a_2)}{\sqrt{a_1^2+(a_3+a_2)^2}^5}\sum_{0'}^{(m-1)'}\varrho_{s'} + \frac{z_1+z_n}{4a_3^3} = 0. \end{aligned}$$

Hätten wir statt Pol 1 Pol n bevorzugt, so wären wir auf dieselbe Gleichung (85.) und eine zu (86.) ganz entsprechende Gleichung geführt worden. Wir haben damit alle zu unseren Betrachtungen erforderlichen Formeln. Machen wir nämlich jetzt für die Ringelektronen den Ansatz (77.) und setzen außerdem $z_1 = 0$ und $z_n = 0$, so gehen die auf die Ringelektronen bezüglichen Gleichungen ebenso wie im vorigen Paragraphen in 6 Gleichungen, und wenn wir schließlich noch unter Benutzung der weiteren Symmetrie der Anordnung die Beziehung (78.) hinzunehmen, in 3 Gleichungen über, die im wesentlichen mit (79.) übereinstimmen, während die Gleichung (86.) ebenso wie die entsprechende Bewegungsgleichung für Elektron n befriedigt ist, sofern

$$(87.)\quad \sum_0^{m-1}{}^{s} z_0 = 0; \quad \sum_{0'}^{(m-1)'} z_{s'} = 0; \quad \sum_0^{m-1}{}^{s}\varrho_s = 0; \quad \sum_{0'}^{(m-1)'}\varrho_{s'} = 0.$$

Wegen (77.) sind diese Bedingungen erfüllt, wenn

$$(88.) \qquad \sum_{0}^{m-1} {}_s \, \alpha^s = 0,$$

wobei α Wurzel der Gleichung $x^m = 1$ ist. Gleichung (88.) gilt aber bekanntlich für alle Wurzeln α mit Ausnahme von $\alpha = +1$. Bei den zu $\alpha = +1$ gehörigen Hauptschwingungen bewegen sich also die beiden Pole mit. $\alpha = +1$ wird aber erhalten, indem man in $\alpha = e^{k\frac{2i\pi}{m}}$ für k die Werte $k = 0$ oder $k = m$ einsetzt. Für diese beiden Werte von k ist also Gleichung (86.) nicht von vorneherein erfüllt, sondern muß bei der Bildung der charakteristischen Determinante benutzt werden. Für alle übrigen Hauptschwingungen ruhen aber die Pole 1 und n, abgesehen von den Schwingungen des ganzen Systems als starres Gebilde, die hier nicht in Frage kommen, und es existieren die entsprechenden Hauptschwingungen des Doppelringes wie im vorigen Paragraphen, sodaß wir die dortigen Stabilitätsbedingungen mit kleinen Änderungen — der Anwesenheit der beiden Pole entsprechend — übernehmen können. Es treten nämlich bloß in den Gleichungen (79.) zu den Koeffizienten von ϱ_0 und z_0 noch additiv gewisse Größen hinzu, und zwar zu den Koeffizienten von ϱ_0 und z_0 in (79a.) kommt P bzw. R und zu den Koeffizienten von ϱ_0 und z_0 in (79b.) kommt R bzw. Q hinzu, wobei

$$(89.) \qquad \begin{aligned} P &= \frac{2a_1^2 - (a_3 - a_2)^2}{\sqrt{a_1^2 + (a_3 - a_2)^2}^5} + \frac{2a_1^2 - (a_3 + a_2)^2}{\sqrt{a_1^2 + (a_3 + a_2)^2}^5}, \\ Q &= \frac{2(a_3 - a_2)^2 - a_1^2}{\sqrt{a_1^2 + (a_3 - a_2)^2}^5} + \frac{2(a_3 + a_2)^2 - a_1^2}{\sqrt{a_1^2 + (a_3 + a_2)^2}^5}, \\ R &= -\frac{3a_1(a_3 - a_2)}{\sqrt{a_1^2 + (a_3 - a_2)^2}^5} + \frac{3a_1(a_3 + a_2)}{\sqrt{a_1^2 + (a_3 + a_2)^2}^5}. \end{aligned}$$

Damit haben wir wieder die allgemeinen Betrachtungen für die Stabilitätsuntersuchungen erledigt, und wir können zur Untersuchung spezieller Anordnungen schreiten. Das Resultat dieser Berechnung (siehe Diss. S. 67 ff.) ist im folgenden Paragraphen angegeben.

§ 6. Zusammenstellung der gefundenen stabilen Anordnungen und Verallgemeinerung der Resultate.

1. Einfacher Ring

$$n = 1, 2, 3,$$

2. Einfacher Ring mit 2 Polen $n = 1 + m + 1$:

$5 = 1 + 3 + 1$; $6 = 1 + 4 + 1$ (Oktaeder); $7 = 1 + 5 + 1$.

3. Doppelring $n = m + m$:

$4 = 2 + 2$ (Tetraeder); $6 = 3 + 3$ (Oktaeder); $8 = 4 + 4$.

4. Doppelring mit 2 Polen $n = 1 + m + m + 1$:

$10 = 1 + 4 + 4 + 1$; $12 = 1 + 5 + 5 + 1$ (Ikosaeder); $14 = 1 + 6 + 6 + 1$.

An diese Tabelle möchte ich noch die Bemerkung anfügen, daß, mit 16 Elektronen ein ganz neuer Anordnungstyp beginnt, indem man nun nicht mehr mit 2 Ringen auskommt, sondern zu 3 Elektronenringen geführt wird, die gegenseitig verschränkt liegen. Als die wahrscheinlich stabilen Anordnungen von 16, 18 und 20 Elektronen fanden wir die folgenden: $16 = 4 + 8 + 4$; entsprechend $18 = 1 + 4 + 8 + 4 + 1$ und $20 = 5 + 10 + 5$. Betrachten wir nun die obige Tabelle der stabilen Anordnungen etwas näher, so fällt uns auf, daß bei allen Anordnungen eine Achse ausgezeichnet ist, die Symmetrieachse der Anordnung ist. Ferner gilt bei allen stabilen Anordnungen unserer Tabelle das Prinzip der gegenseitig verschränkten Lage der einzelnen Elektronenringe, derart, daß bei Projektion der beiden Ringe auf eine Ebene senkrecht zur Symmetrieachse ein Einzelring entsteht, während im Fall von 3 Ringen durch diese Projektion 2 Ringe mit gleichviel Elektronen in der Ebene entstehen, die gegenseitig verschränkt liegen.

Um nun die gefundenen Resultate zu verallgemeinern, liegt es nahe, anzunehmen, daß bei allen stabilen Anordnungen eine Achse ausgezeichnet ist, die Symmetrieachse der Anordnung ist, und daß ferner bei allen stabilen Anordnungen das Prinzip der Verschränkung Geltung besitzt. Wenn wir mit diesen Annahmen auch nicht für jede Anzahl von Elektronen eine bestimmte stabile Anordnung angeben können, so läßt sich doch mit Hilfe unseres Anordnungsprinzipes eine gewisse Periodizität in den stabilen Gleichgewichtsgebilden der Elektronen bei zunehmender Anzahl von Elektronen erkennen, die mir wegen der Analogie mit dem periodischen System der Elemente von besonderem Interesse zu sein scheint.

Was die Pole betrifft, d. h. die außerhalb der Ringe auftretenden Elektronen, so können deren natürlich immer bloß 1, 2 oder 3 auftreten: nämlich im Falle eines Poles befindet er sich im Kugelmittelpunkt; zwei ordnen sich zu beiden Seiten der Ringsysteme an, während schließlich bei 3 Polen zu den zwei äußeren noch ein dritter im Mittelpunkt hinzukommt. Im ersten wie im letzten Fall, wo beide Male ein Elektron im

Kugelmittelpunkt sitzt, handelt es sich um eine ungerade Anzahl n von Elektronen. Da wir dieselbe natürlich stets aus der schon gefundenen geradzahligen Anordnung $n-1$ durch Hinzufügen eines Elektrons im Mittelpunkt erzeugen, so brauchen wir uns im weiteren bloß um gerade Zahlen n zu kümmern, für die demnach entweder keine Pole oder 2 Pole auftreten können.

Man sieht ein, daß für die Anordnung von n Elektronen die Teilbarkeitsverhältnisse der Zahl n maßgebend sind. Da aber namentlich für große Zahlen die Möglichkeiten der Faktorenzerlegung und damit die Anordnungsmöglichkeiten sehr groß werden, so hat es den Anschein, als ob man die Anordnung für größere Zahlen überhaupt nicht mehr übersehen könnte. Jedoch werden wir nunmehr gewisse Zahlen von ganz bestimmten Eigenschaften aus der Zahlenreihe herausgreifen, für die die stabile Anordnung sich nach unserem Anordnungsprinzip bestimmen läßt. Wir verlangen von diesen Zahlen, die wir N nennen wollen, daß sie einerseits das Doppelte einer Primzahl p_1, andrerseits, um 2 vermindert, das Vierfache einer anderen Primzahl p_2 sind; also

$$N = 2p_1 = 2 + 4p_2.$$

Zahlen dieser Eigenschaft sind

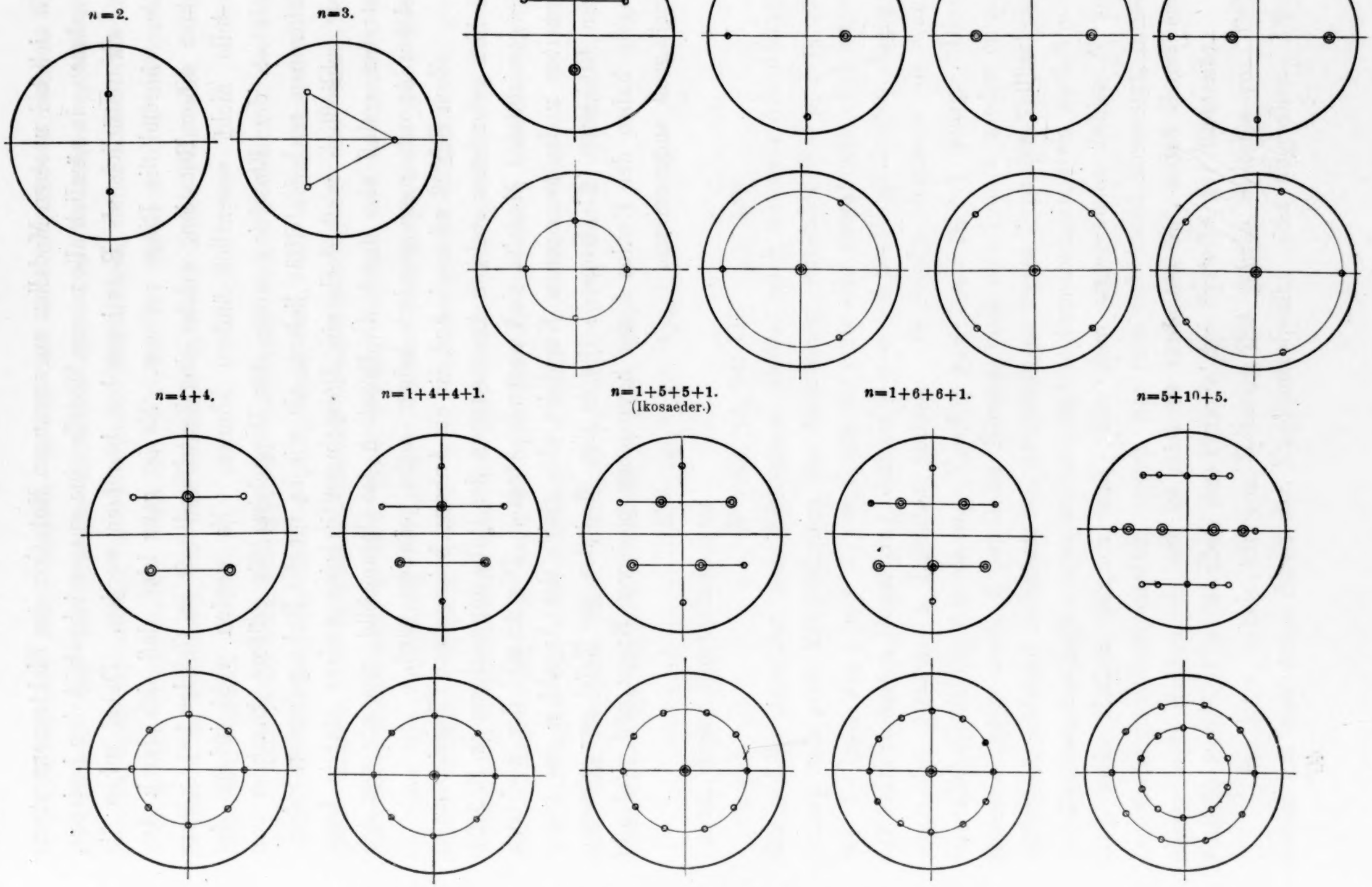
$$N = 22,\ 46,\ 94,\ 118 \qquad \text{usw.}$$

Für solche Anzahlen von Elektronen bleiben nach unserem Anordnungsprinzip nur zwei Möglichkeiten der Anordnung: entweder $N = p_1 + p_1$ oder $N = 1 + p_2 + 2p_2 + p_2 + 1$, von denen die erste sehr unwahrscheinlich ist, da wir beim isolierten Doppelring bloß bis $8 = 4 + 4$ Stabilität fanden, dagegen schon bei $10 = 5 + 5$ Labilität eintrat. Es bleibt demnach als wahrscheinliche stabile Anordnung $N = 1 + p_2 + 2p_2 + p_2 + 1$ übrig. Dieser Anordnungstyp nach 3 parallelen Ringen muß also immer wieder einmal auftreten, während zwischen den Anordnungen dieses Typs den Teilbarkeitsverhältnissen der Zahlen entsprechend, andere Anordnungen, etwa nach 5 oder noch mehr Ringen möglich sind. Die oben angegebenen Zahlen N von den verlangten Eigenschaften treten, wie man sich leicht überzeugt, immer wieder nach Hinzufügen von 24 oder 48 Einheiten auf, sodaß damit eine Periode festgelegt ist ähnlich der Periode des Systems der Elemente.

Bis jetzt haben wir von Rotation des ganzen Systems von Elektronen um eine Achse durch den Kugelmittelpunkt ganz abgesehen. Doch

läßt sich bei unseren Modellen ungezwungen Rotation des Elektronensystems annehmen, da nämlich alle unsere Modelle eine ausgezeichnete Achse besitzen, die wir natürlich als Rotationsachse benutzen werden. Dabei ruhen die Pole, während die Ringe rotieren. Es ist ganz klar, daß sich durch Annahme dieser Rotation, welche eine Zentrifugalkraft im Gefolge hat, unsere Modelle nicht wesentlich ändern können. Es werden wohl infolge der Rotation der Einzelring sowie der Doppelring für größere Anzahlen von Elektronen noch Stabilität liefern, als wir es für die Ruhe gefunden haben, aber schließlich muß doch ein Umspringen in eine andere stabile Lage eintreten, sodaß also durch die Rotation das Gesamtbild, das wir von den stabilen Anordnungen gegeben haben, nicht geändert wird.

Zum Schluß sei noch auf die als Anhang beigegebene Übersichtstafel der hier gefundenen stabilen Anordnungen der Ruhe hingewiesen (s. S. 302). Die gezeichneten Modelle sind neutrale Atome. Die Anzahl der positiven Einheiten ν der homogenen Kugel ist also gleich der Anzahl n der negativen Einheiten (Elektronen). Die in den Modellen der Tafel gezeichneten Kugeln haben den Radius b der homogenen positiven Kugel und sind alle gleich groß angenommen.



Zusammenstellung der gefundenen stabilen Anordnungen.

Metrische Untersuchungen der kubischen Hyperbel insbesondere der gleichseitigen.

Von Herrn *Wolfgang Vogt* in Karlsruhe i. B.

Die Metrik der kubischen Kegelschnitte steht an Reichtum hinter den ebenen Kegelschnitten weit zurück. Nur die kubische Parabel hält in dieser Beziehung den Vergleich mit der ebenen Parabel aus, seitdem *H. Schröter**) den *Archimedes*schen Satz über den Inhalt des Parabelsegmentes und damit zusammenhängende Sätze auf die Raumparabel in höchst merkwürdiger Weise übertragen hat. Die metrischen Eigenschaften der kubischen Raumkurve werden sonst meist als Spezialfälle allgemeiner projektiver Sätze gewonnen und sind darum auch in den Lehrbüchern**) nicht leicht zugänglich. Eine nicht-projektive metrische Untersuchung muß natürlich die verschiedenen Gestalten der kubischen Raumkurve einzeln vornehmen. Die folgenden Seiten behandeln die kubische Hyperbel $\mathfrak{H}^3$. Ausgehend von einem durch die Asymptoten bestimmten Parallelepiped, welches in gewisser Beziehung den Mittelpunkt ersetzt, entwickeln sie eine Anzahl neuer Eigenschaften, durch welche auch die bekannten leichter zugänglich werden. Insbesondere wird die Erkenntnis wichtig sein, daß mit jeder kubischen Hyperbel gleichzeitig eine andere auftritt, die wir, in Analogie zu den konjugierten Hyperbeln in der Ebene „konjugiert“ nennen, und welche von ihr in metrischer Beziehung nicht zu trennen ist.

---

*) *H. Schröter*, Mathem. Annalen, 25, S. 293 ff.

**) Vgl. *H. Schröter*, die Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung, Leipzig 1880, § 39. *Th. Reye*, die Geometrie der Lage II (Stuttgart 1907) Vorträge 22, 23, 24. Diesem Werke sind unsere Bezeichnungen entnommen.

In den letzten Seiten behandeln wir eine spezielle kubische Hyperbel, die *gleichseitige*, d. h. diejenige mit drei rechtwinkligen Asymptoten. Die entwickelten Sätze stehen in Analogie zu einem Satze über die ebene gleichseitige Hyperbel, nach welchem der Höhenschnittpunkt jedes einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks auch auf ihr gelegen ist.

I. Metrische Eigenschaften der allgemeinen kubischen Hyperbel.

1. *Das Grundparallelepiped.* Während in der Ebene zu denselben zwei Asymptoten eine Büschelschar von Hyperbeln gehört, ist eine kubische Hyperbel $\mathfrak{H}^3$ durch ihre drei Asymptoten a, b, c eindeutig bestimmt. a, b, c müssen windschief sein, denn keine zwei Tangenten einer Raumkurve dritter Ordnung können in einer Ebene liegen, es sei denn, daß sie als Tangenten benachbart sind. Jede der drei Asymptoten z. B. a ist Kante eines hyperbolischen Zylinders durch $\mathfrak{H}^3$. Die Asymptotenebenen des Zylinders enthalten dann die beiden anderen Asymptoten der $\mathfrak{H}^3$, hier b und c. Die Achse des Zylinders, d, ist daher die zu a parallele Treffgerade von b und c, und er ist durch die Asymptotenebenen (db), (dc) und die Erzeugende a vollständig bestimmt. Entsprechendes gilt von den beiden anderen Zylindern mit den Kanten b und c.

Die Asymptoten a, b, c einer kubischen Hyperbel $\mathfrak{H}^3$ und die Achsen d, e, f der drei hyperbolischen Zylinder durch $\mathfrak{H}^3$ bilden ein räumliches Parallelhexagon. Die parallelen Gegenkantenpaare a, d; b, e; c, f sind je eine Asymptote und eine Achse. Das Parallelhexagon ist Kantenzug eines Parallelepipeds („Grundparallelepiped"), dessen sechs Ebenen die drei Paare von Asymptotenebenen der drei Zylinder liefern.

Die $\mathfrak{H}^3$ ist als Schnitt der drei so bestimmten Zylinder leicht zu konstruieren. Die Ecken des Parallelhexagons heißen A, A_1, B, B_1, C, C_1, die beiden Ecken des Parallelepipeds, an welche der sechsseitige Zug nicht herankommt M, M_1. Die Schmiegungsebene α in dem Punkte A_∞, dem unendlich fernen Punkte der Asymptote a, ist Tangentialebene an den Zylinder längs a. Dieser schneidet in die Ebene $M_1 A_1 B B_1$ eine Hyperbel mit den Asymptoten $B_1 M_1$, $B_1 B$ ein, welche durch A_1 geht; ihre Tangente in A_1 ist parallel zu der Diagonale $M_1 B$ des von A_1 und den Asymptoten bestimmten Parallelogramms. Die Tangentialebene des Zylinders längs a ist daher parallel zu der Diagonalebene MBM_1C_1 des Grundparallelepipeds:

Die Schmiegungsebenen α, β, γ in den unendlich fernen Punkten A_∞, B_∞, C_∞ der $\mathfrak{H}^3$ sind diejenigen Ebenen durch die Asymptoten a, b, c, welche zu der Diagonale MM_1 des Grundparallelepipeds parallel laufen.

Die asymptotischen Schmiegungsebenen α, β, γ sind daher drei Ebenen des dem Parallelepiped umschriebenen Parallelogramm-Dodekaeders. Sie bilden ein Dreikant mit den Kanten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ parallel zu MM_1, für welches MM_1 Schnittgerade der drei Mitteltransversalebenen ist. a, b, c begegnen den Kanten $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, bzw. $\mathfrak{c}, \mathfrak{a}$; $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$*) in den Punkten $A_\mathfrak{b}, A_\mathfrak{c}$ usw., so daß $A_\mathfrak{b} A_\mathfrak{c} = 3 \cdot AA_1$ ist und denselben Mittelpunkt $\mathfrak{A}$ hat.

2. *Drei schiefe Symmetrien.* Jede Ebene des Parallelepipeds enthält eine Asymptote der $\mathfrak{H}^3$ und noch einen anderen unendlich fernen Punkt, kann also im Endlichen keinen Punkt der $\mathfrak{H}^3$ mehr besitzen. Die $\mathfrak{H}^3$ besteht aus drei Zügen, welche je zwei unendlich ferne Punkte zweier Asymptoten verbinden; da sie nach dem vorigen keine der Parallelepipedebenen durchdringen darf, so können von den 27 Gebieten, in welche der Raum durch die sechs Parallelepipedebenen geteilt wird, nur die drei über den Kanten B_1C, C_1A, A_1B gelegenen einen reellen Zug der $\mathfrak{H}^3$ enthalten**).

Durch den Mittelpunkt $\mathfrak{O}$ des Parallelepipeds und die Mittelpunkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ der Kanten des Kantenzuges $AA_1BB_1CC_1$ geht eine „*Mittelebene*“ μ; sie enthält die Verbindungsgeraden der Mitten je zweier Gegenkanten $\mathfrak{AD}, \mathfrak{BE}, \mathfrak{CF}$. Nimmt man $\mathfrak{AD}$ als Achse einer schiefen Spiegelung in der Weise, daß die Spiegelungsstrahlen parallel zu α laufen, so geht der Zylinder mit Achse d in sich selbst über, weil die Spiegelung die Asymptotenebenen vertauscht, die Erzeugende a aber in Ruhe läßt. Die beiden anderen Zylinder gehen ineinander über, weil die Asymptotenebenen und die Erzeugenden b und c vertauscht werden. Entsprechendes gilt für die schiefen Spiegelungen an $\mathfrak{BE}$ und $\mathfrak{CF}$, für welche die Spiegelungsstrahlen bzw. zu β und γ parallel sind.

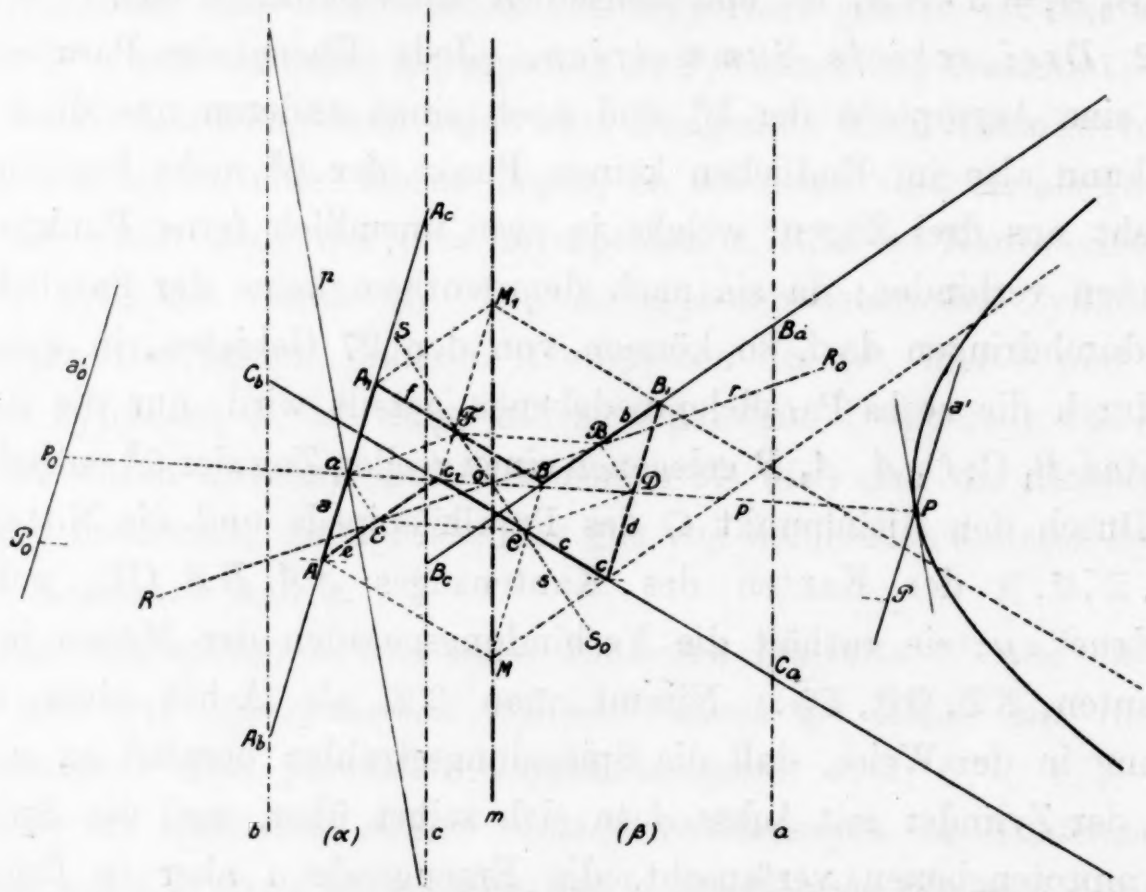
Die $\mathfrak{H}^3$ geht durch die schiefen Spiegelungen an den Geraden $\mathfrak{OA} = p$, $\mathfrak{OB} = r$, $\mathfrak{OC} = s$, deren Spiegelungsstrahlen parallel zu α bzw. β und γ sind, in sich selbst über. („Durchmesser“).

---

*) Die im Text vorkommenden deutschen Druck-Buchstaben sind in der Figur versehentlich durch Buchstaben der lateinischen Schrift wiedergegeben.

**) In der Figur ist nur ein Teil eines Zuges gezeichnet.

Stellt man sich die drei von den drei Zylindern in die Mittelebene μ eingeschnittenen Hyperbeln mit ihren bezüglichen Asymptoten $\mathfrak{DB}, \mathfrak{DC}$; $\mathfrak{EA}, \mathfrak{EC}$; $\mathfrak{FA}, \mathfrak{FB}$ vor, so sieht man leicht, daß die in der Figur mit P, R, S bezeichneten Punkte, welche man auf $\mathfrak{AD}$ durch Verlängerung um diese Strecke über $\mathfrak{D}$ hinaus, auf $\mathfrak{BE}$ durch Verlängerung über $\mathfrak{E}$ hinaus um $\mathfrak{BE}$, und auf $\mathfrak{CF}$ durch Verlängerung von $\mathfrak{CF}$ um sich selbst über $\mathfrak{F}$ hinaus erhält, auf allen drei Hyperbeln also auch auf $\mathfrak{H}^3$ liegen. Da sie den Spiegelungsachsen angehören, nennen wir sie „*Scheitelpunkte*“



der $\mathfrak{H}^3$. Es ist klar, daß ihre Tangenten bzgl. zu α, β, γ parallel sein müssen, während ihre Schmiegungsebenen π, ϱ, σ die Durchmesser p, r, s enthalten; diese sind also Schmiegungsstrahlen. Bekanntlich schneiden alle Schmiegungsebenen einer $\mathfrak{H}^3$ eine unter ihnen in den Tangenten eines Kegelschnittes, und die zugehörigen Tangenten der Raumkurve schneiden die zugehörigen Berührungspunkte auf dem Kegelschnitt ein. In α sind von diesem Kegelschnitt die parallelen Tangenten $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ mit ihren Berührungspunkten $C_\mathfrak{b}$ und $B_\mathfrak{c}$, sowie die Asymptote a bekannt. Die zweite Asymptote geht dann ebenfalls durch $\mathfrak{A}$ und ist dadurch bestimmt, daß die von ihr, der Geraden a und den beiden Geraden $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ gebildeten Dreiecke $C_\mathfrak{b} B_\mathfrak{c}$ zur Mitteltransversale haben müssen. Diese zweite Asymptote $\mathfrak{p}$ in α wird

von der Schmiegungsebene π in P eingeschnitten und gibt selbst die Richtung der Tangente in P an. Entsprechendes gilt für die Punkte R und S. Zieht man durch $\mathfrak{O}$ die Parallelen zu diesen Tangenten, so findet sich leicht der Satz: die Parallelen durch $\mathfrak{O}$ zu den Scheiteltangenten teilen die Kanten BM, bzw. CM und AM innen im Verhältnis 5:3.

Die durch $\mathfrak{O}$ gehende Doppelsekante der $\mathfrak{H}^3$ muß Spiegelungsstrahl für alle drei schiefen Spiegelungen sein, sie ist daher MM_1. Die Schmiegungsebenen in den Schnittpunkten müssen wegen der drei Spiegelungen zueinander und zu der Mittelebene parallel sein. Auf MM_1 liegen also die zwei Punkte der $\mathfrak{H}^3$ mit parallelen Schmiegungsebenen; da MM_1 in keines der Raumgebiete mit reellem Zug der $\mathfrak{H}^3$ eindringt, so sind sie imaginär.

Da die $\mathfrak{H}^3$ die drei schiefen Spiegelungen an den Durchmessern p, r, s zuläßt, so muß der Schwerpunkt der $\mathfrak{H}^3$ auf jedem von ihnen also in ihrem Schnittpunkt $\mathfrak{O}$ gelegen sein. Eine beliebige Ebene ε parallel zur Mittelebene schneidet die $\mathfrak{H}^3$ in einem Dreieck XYZ. Durch alle drei Spiegelungen geht die Ebene ε in die parallele und nach der anderen Seite von der Mittelebene gleichweit abstehende Ebene ε_1, das Dreieck XYZ also in das Schnittdreieck dieser Ebene ε_1 mit der $\mathfrak{H}^3$ über $X_1Y_1Z_1$. Bei jeder schiefen Spiegelung bleibt das Verhältnis zweier auf derselben Geraden gelegenen Strecken erhalten. Darum geht der Schwerpunkt des Dreiecks XYZ durch alle drei Spiegelungen in den Schwerpunkt des Dreiecks $X_1Y_1Z_1$ über; beide liegen auf MM_1.

$\mathfrak{O}$ ist der Schwerpunkt der $\mathfrak{H}^3$; alle Ebenen parallel zur Mittelebene schneiden $\mathfrak{H}^3$ in Dreiecken, deren Schwerpunkte im Schnittpunkt mit MM_1 liegen). Die Mitteltransversalen sind Schmiegungsstrahlen, d. h. die Schmiegungsebenen der Eckpunkte eines solchen Dreiecks laufen durch den Schwerpunkt.*

3. *Asymptoten- und Haupthyperboloid.* Die Asymptoten a, b, c bestimmen eine Regelschar *(Asymptotenhyperboloid)*. Das Parallelhexagon verläuft auf dem Asymptotenhyperboloid**). Der Mittelpunkt $\mathfrak{O}$

---

*) Vgl. hierzu den Satz von *Cremona*, nach welchem der Nullpol einer beliebigen Ebene und die in ihr gelegene Biplanare harmonische Pol und Polare sind in bezug auf das von der kubischen Raumkurve in die Ebene eingeschnittene Dreieck. Annali di Matematica I. 2, S. 21. Vgl. auch *Jolles*, dieses Journal, Bd. 130, S. 270.

**) *Schröter*, über das Parallelhexagon auf dem Hyperboloid, Mathem. Ann. 18, S. 428ff.

des Parallelepipeds ist auch sein Mittelpunkt. Dem Durchmesser MM_1 ist die Mittelebene μ konjugiert, denn die Polarebenen von μ und M_1 sind die zur Mittelebene parallelen Ebenen $A_1B_1C_1, ABC$. Zieht man durch P, R, S bzw. die Parallelen a', b', c' zu a, b, c, so bestimmen diese eine neue Regelschar, welche aus der Asymptotenschar durch Ähnlichkeitstransformation mit dem Zentrum $\mathfrak{O}$ und dem Ähnlichkeitsverhältnis 1:3 hervorgeht. Dieses Hyperboloid besitzt daher denselben Asymptotenkegel wie das erste und berührt folglich die $\mathfrak{H}^3$ in den drei unendlich fernen Punkten, während es sie außerdem in den Punkten P, R, S schneidet. $\mathfrak{H}^3$ ist darum ganz auf diesem Hyperboloid gelegen.

$\mathfrak{H}^3$ besitzt eine Regelschar von Doppelsekanten („Haupthyperboloid"), welche aus der Asymptotenschar durch Ähnlichkeit mit dem Zentrum $\mathfrak{O}$ und dem Ähnlichkeitsverhältnis 1:3 *hervorgeht.*

Das Asymptotenhyperboloid vertritt in vieler Beziehung bei der Raumhyperbel die Stelle der Asymptoten bei der ebenen, z. B. in dem nachstehenden Satze, der unmittelbar aus dem vorhergehenden folgt:

Auf jeder Doppelsekante der $\mathfrak{H}^3$ liegt ein Schnittpunkt mit der $\mathfrak{H}^3$ von einem Schnittpunkt mit dem Asymptotenhyperboloid gleichweit entfernt wie der andere Schnittpunkt mit der $\mathfrak{H}^3$ von dem anderen Schnittpunkt mit dem Asymptotenhyperboloid.

Die Tangenten der $\mathfrak{H}^3$ schneiden das Asymptotenhyperboloid in zwei (imaginären) Punkten, deren Mittelpunkt der Berührungspunkt ist.

4. *Das Nullsystem.* Mit $\mathfrak{H}^3$ ist ein Nullsystem verbunden, in welchem jedem Punkte der $\mathfrak{H}^3$ seine Schmiegungsebene als Nullebene zugehört. Die Schmiegungsebenen α, β, γ, in den unendlichfernen Punkten der $\mathfrak{H}^3$ laufen zu MM_1 parallel. Darum ist MM_1 Durchmesserrichtung des linearen Komplexes und schneidet in die unendlich ferne Ebene ihren Nullpol ein. Die Ebenen α, β, γ schneiden sich in den Komplexdurchmessern $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$. Den Punkten von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ sind die Ebenenstellungen des Parallelepipeds zugeordnet, nämlich den Punkten von $\mathfrak{c}$ die Ebenen der Stellung (a, b), den Punkten von $\mathfrak{a}$ die Ebenen der Stellung (b, c), denjenigen von $\mathfrak{b}$ die der Stellung (c, a). Den Punkten der Hauptdiagonale MM_1 gehören als Nullebenen die Ebenen von der Stellung der Mittelebene zu, wie das schon aus Nr. 2 hervorgeht.

5. *Parallelepipede konstanten Inhalts.* Nimmt man die drei durch einen vom Hexagon nicht getroffenen Eckpunkt M des Parallelepipeds gehenden Kanten MB, MC, MA zu positiven Halbachsen x, y, z eines schiefen Koordinatensystems und bezeichnet die Kantenlängen MA, MB, MC selbst mit a, b, c, so haben die drei Zylinder durch $\mathfrak{H}^3$ die folgenden Gleichungen

$$z(y-b) = -b \cdot c, \quad x(z-c) = -a \cdot c, \quad y(x-a) = -a \cdot b.$$

Die erste Gleichung mit x multipliziert gibt unter Benutzung der zweiten

$$x \cdot y \cdot z = -a \cdot b \cdot c$$

als eine Gleichung für die Koordinaten der Punkte der $\mathfrak{H}^3$. Nimmt man ebenso die Kanten M_1C_1, M_1A_1, M_1B_1 als positive Halbachsen eines schiefen Koordinatensystems x', y', z', so ergibt sich für alle Punkte der Kurve

$$x' \cdot y' \cdot z' = -a \cdot b \cdot c.$$

Die Punkte der kubischen Hyperbel bestimmen mit den beiden Dreiflachen an den Punkten M und M_1 Parallelepipede von konstantem Rauminhalt; der Betrag des Rauminhaltes ist gleich dem des Grundparallelepipeds.

Die beiden kubischen Flächen

$$xyz = -abc, \quad x'y'z' = -abc$$

schneiden sich außer in $\mathfrak{H}^3$ in den drei unendlich fernen Geraden der Parallelepipedebenen, und darum noch in einer Kurve dritter Ordnung. Bei der Frage des Schnittes dieser beiden kubischen Flächen spielt aber, wie auch leicht analytisch einzusehen ist, die kubische Raumkurve mit den Asymptoten a, b, c und den Zylinderachsen d, e, f genau dieselbe Rolle wie diejenige mit den Asymptoten d, e, f und den Zylinderachsen a, b, c. Sie gibt also den letzten Schnittbestandteil der beiden kubischen Flächen.

Einer kubischen Hyperbel $\mathfrak{H}^3$ ist eine andere $\mathfrak{H}_0^3$ „konjugiert", welche die Zylinderachsen der ersten zu Asymptoten, ihre Asymptoten zu Zylinderachsen hat. Beide zusammen sind der Ort der Punkte, welche mit den beiden Dreiflachen an den Ecken M und M_1 Parallelepipede vom Inhalt des Grundparallelepipeds bilden.

6. *Die konjugierte Hyperbel.* Die konjugierte Hyperbel $\mathfrak{H}_0^3$ hat mit $\mathfrak{H}^3$ fast alle metrischen Eigenschaften gemein. Die Asymptoten von $\mathfrak{H}_0^3$ gehen aus denen von $\mathfrak{H}^3$ durch Spiegelung an $\mathfrak{O}$ hervor, darum entsteht auch $\mathfrak{H}_0^3$ aus $\mathfrak{H}^3$ durch Spiegelung an $\mathfrak{O}$. $\mathfrak{H}_0^3$ besitzt dasselbe Asymptotenhyperboloid, ihre Asymptoten gehören aber der Leitschar an; $\mathfrak{H}_0^3$

und $\mathfrak{H}^3$ liegen auch auf demselben Haupthyperboloid, doch ist die Schar der Doppelsekanten für die eine die Schar der einfachen Sekanten für die andere. $\mathfrak{H}_0^3$ und $\mathfrak{H}^3$ haben die Doppelsekante MM_1 und darum auch die auf ihr gelegenen Punkte mit parallelen Schmiegungsebenen gemeinsam. Schwerpunkt, Mittelebene und die drei Durchmesser von $\mathfrak{H}^3$ haben dieselbe Bedeutung für $\mathfrak{H}_0^3$. Die Scheitelpunkte P_0, R_0, S_0 der $\mathfrak{H}_0^3$ liegen auf denselben Durchmessern im gleichen Abstand von $\mathfrak{O}$ nach der entgegengesetzten Seite und haben dieselben Ebenen zu Schmiegungsebenen. Die beiden zu den Kurven gehörigen Nullsysteme haben zur gemeinsamen linearen Kongruenz von Nullstrahlen diejenige mit den Geraden MM_1 und der unendlich fernen Geraden der Mittelebene als Leitgeraden, welche aus Schmiegungsstrahlen für beide Kurven besteht. Die beiden derselben Schmiegungsebene π zugeordneten Nullpunkte P und P_0, entsprechen einander in der zu dieser linearen Kongruenz gehörigen windschiefen Involution. Daraus folgt*):

Die zu zwei konjugierten Kurven $\mathfrak{H}^3$ und $\mathfrak{H}_0^3$ gehörigen Nullsysteme sind in Involution, oder mit anderen Worten, jedes ist nullinvariant bezüglich des anderen.

Beide Kurven liegen auf dem Haupthyperboloid. Dieses hat die Leitgeraden der gemeinsamen linearen Kongruenz zu Polaren. Alsdann wird die Fläche, wie man leicht sieht, durch die beiden Nullsysteme in Involution in ein und dieselbe andere übergeführt.

Zwei konjugierte Kurven, die schon auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, umhüllen auch durch ihre Schmiegungsebenen eine Fläche zweiter Klasse.

Der Zylinder durch $\mathfrak{H}^3$ mit Achse a und derjenige durch $\mathfrak{H}_0^3$ mit Achse d schneiden in die Ebene $MACC_1$ zwei Hyperbeln mit den Asymptoten CM, CC_1 bzw. AM, AC_1 ein. Die zweite geht aus der ersten durch Parallelverschiebung um die Strecke CA hervor. Der gemeinsame Durchmesser CA schneidet die erste Hyperbel in A und $\mathfrak{P}$, die zweite in C und $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_0$ liegen auf den Parallelen durch P und P_0 zu a, genannt a', a_0'. Bekanntlich ist der Ort der Mittelpunkte aller durch einen festen Punkt gelegten Sehnen einer Hyperbel eine neue Hyperbel, welche durch den festen Punkt geht und parallele Asymptoten besitzt. Unsere beiden Hyperbeln liegen nun so, daß der Ort der Mittelpunkte

*) *Th. Reye*, Geometrie der Lage, II. 1907, S. 144.

aller durch $\mathfrak{P}_0$ gehenden Sehnen der ersten die zweite ist, und der Ort der Mittelpunkte aller durch $\mathfrak{P}$ gehenden Sehnen der zweiten, die erste. Räumlich bedeutet das: Jede Treffgerade von a_0' (bzw. a') schneidet den Zylinder mit Achse d (bzw. mit Achse a) in zwei Punkten, deren Mittelpunkt auf dem letzten Schnittpunkt mit dem Zylinder mit Achse a (bzw. d) liegt. a_0 und a_0' gehören dem Haupthyperboloid an. Die Geraden der beiden Scharen stützen sich also auf a_0' bzw. auf a'. Daraus folgt:

Der Ort der Mittelpunkte der auf dem Haupthyperboloid gelegenen Doppelsekanten von $\mathfrak{H}^3$ ist $\mathfrak{H}_0^3$, und der Ort der Mittelpunkte der auf dem Haupthyperboloid gelegenen Doppelsekanten von $\mathfrak{H}_0^3$ ist $\mathfrak{H}^3$. Von zwei konjugierten Hyperbeln halbiert jede die auf dem Haupthyperboloid gelegene Doppelsekantenschar der anderen.

Der Ort der Mittelpunkte aller Sehnen einer kubischen Raumkurve ist eine kubische Fläche dritter Ordnung, ihre Zentralfläche. Die beiden zu $\mathfrak{H}^3$ und $\mathfrak{H}_0^3$ gehörigen Zentralflächen schneiden sich in den drei unendlich fernen Doppelsekanten, den drei gemeinsamen Durchmessern, den Asymptoten und Achsen, und nach dem vorigen Satze auch noch in den beiden Kurven selbst. Sie sind infolgedessen identisch. Da beide Flächen durch die Spiegelung an $\mathfrak{O}$ ineinander übergehen müßten, so hat die Fläche, in welche sie zusammenfallen in $\mathfrak{O}$ einen Mittelpunkt. Jeder ebene Schnitt der kubischen Fläche durch $\mathfrak{O}$ hindurch muß daher in $\mathfrak{O}$ einen Wendepunkt besitzen. Die Tangentialebene in $\mathfrak{O}$ muß die Fläche in einer ebenen Kurve dritter Ordnung mit dreifachem Punkt in $\mathfrak{O}$ schneiden, d. h. in drei Geraden. Tangentialebene in $\mathfrak{O}$ ist daher die Mittelebene μ, welche mit der Fläche die drei Durchmesser p, r, s gemein hat.

*Die beiden konjugierten Hyperbeln besitzen dieselbe Zentralfläche dritter Ordnung, welche in $\mathfrak{O}$ einen Mittelpunkt und in ihm die Mittelebene μ zur Tangentialebene hat. $\mathfrak{H}^3$ und $\mathfrak{H}_0^3$ sind Haupttangentenkurven der Zentralfläche**).

7. *Kubische Hyperbeln mit demselben Grundparallelepiped.* Das Parallelepiped besitzt vier Diagonalen, wird also von vier Parallelhexagonen umlaufen. Ein gegebenes Grundparallelepiped gehört daher zu vier Paaren konjugierter Hyperbeln. Die acht Hyperbeln haben alle die unendlich fernen Punkte gemein und schmiegen sich in ihnen den zwölf Ebenen

*) Über die projektiven Eigenschaften dieser Fläche vgl. *R. Sturm*, dieses Journal, Bd. 70, S. 30.

des dem Parallelepiped umschriebenen Parallelogrammdodekaeders an. Von den insgesamt 24 Zweigen der acht Hyperbeln liegen in jedem der zwölf von den Parallelepipedebenen begrenzten und über den Kantenstrecken gelegenen Raumteilen zwei mit demselben Scheitelpunkte. Je zwei Parallelhexagone haben zwei parallele Gegenkanten gemein. Die zugehörigen Paare konjugierter Hyperbeln, sind so zugeordnet, daß sie zu zwei und zwei auf einem hyperbolischen Zylinder liegen. Jeder der zwölf hyperbolischen Zylinder trägt zwei Raumhyperbeln.

Besondere Gestalten des Grundparallelepipeds führen zu metrischen Spezialfällen der Raumhyperbel. Ist das Parallelepiped ein Rhomboeder, so liegt das um die Hauptachse herumlaufende Parallelhexagon auf einem Rotationshyperboloid, Asymptoten- und Haupthyperboloid werden rotatorisch; die Spiegelungen an den Durchmessern, welche die $\mathfrak{H}^3$ in sich überführen, werden orthogonal*).

Ist das Grundparallelepiped rechtwinklig, also ein Quader, so gehen die drei Asymptoten jeder Raumhyperbel dreirechtwinklig ins Unendliche, man nennt sie *gleichseitig*. Sie soll den Gegenstand des nächsten Abschnittes bilden. Im Falle des Würfels vereinigen sich diese beiden Spezialfälle.

II. Die gleichseitige Hyperbel.

8. *Gleichseitige Kegel und Regelscharen.* Ein Kegel und eine Regelschar heißen gleichseitig, wenn sie ein und dann gleich ∞^1 Tripel von dreirechtwinkligen Geraden besitzen. Ebenso nennen wir eine kubische Hyperbel gleichseitig, wenn ihre drei Asymptoten dreirechtwinklig sind. Die Eigenschaft der Gleichseitigkeit beruht auf der Apolarität der Flächen und Kurven bezüglich des absoluten Kegelschnittes**); unsere Behandlung soll sich aber an die elementaren Untersuchungen anschließen, die den

---

*) Diesen Fall stellt das *Wiener*sche Modell der kubischen Hyperbel dar. Verzeichnis mathematischer Modelle, Sammlung von *H. Wiener* und *P. Treutlein*, Leipzig 1912. Vgl. auch die Modelle von *W. Ludwig* in *Schillings* Verlag.

**) Die Systeme von fünf und sechs Punkten, das Tetraeder mit Höhenschnittpunkt und das orthogonale Sechseck, welche im folgenden auftreten, sind metrische Spezialfälle der von *Reye* definierten und behandelten Polarfünfecke und Polarsechsecke. Geometrie der Lage II, 1907, S. 275 ff. und dieses Journal, Bd. 77, S. 269.

gleichseitigen Kegeln und Regelscharen in diesem Journal zuteil wurde*). Wir benutzen nur die folgenden Sätze:

Der Höhenschnittpunkt jedes einer ebenen gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks liegt auf ihr, und jede Hyperbel durch vier solche Punkte ist gleichseitig (duales gilt vom gleichseitigen Kegel).

Ein gleichseitiges Hyperboloid wird von jeder Ebene, die auf einer Erzeugenden senkrecht steht, in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten.

Die Höhen eines beliebigen Tetraeders liegen in einer gleichseitigen Regelschar, der Leitschar gehören sowohl die vier Höhenstrahlen der vier Dreikante des Tetraeders an, als auch die vier Geraden, welche man auf den Ebenen des Tetraeders in dem Höhenschnittpunkte des von ihnen getragenen Dreiecks errichtet.

9. *Gleichseitige Hyperboloide durch eine beliebige Raumhyperbel.* Die Doppelsekantenkongruenz einer Raumkurve dritter Ordnung kann man — bis auf leicht ersichtliche Ausnahmen — eindeutig und umkehrbar durch Parallelverschiebung abbilden auf die Strahlen eines Strahlenbündels $\mathfrak{O}$. Die Regelscharen in der Kongruenz der Doppelsekanten bilden sich ab in die parallelen Kegel durch $\mathfrak{O}$, welche sämtlich die drei Parallelen $a_0\, b_0\, c_0$ durch $\mathfrak{O}$ zu den Asymptoten a, b, c enthalten müssen. Durch die Kanten $a_0\, b_0\, c_0$ geht ein Büschel von gleichseitigen Kegeln, nämlich alle, welche außer a_0, b_0, c_0 noch den Höhenstrahl des von ihnen gebildeten Dreikants besitzen. Daraus folgt:

*Durch eine Raumhyperbel geht im allgemeinen ein Büschel von gleichseitigen Hyperboloiden; sie haben alle diejenige Doppelsekante gemein, welche zu dem Höhenstrahl eines von Parallelen zu den Asymptoten gebildeten Dreikants parallel läuft. Gehen drei nicht einem Büschel angehörige, gleichseitige Hyperboloide durch die Raumkurve, so muß sie gleichseitig sein***).

Insbesondere gehen durch die gewöhnliche $\mathfrak{H}^8$ zwei gleichseitige Kegel, deren Spitzen in den Stützpunkten der ausgezeichneten Doppelsekante liegen.

---

*) *H. Vogt*, über ein besonderes Hyperboloid, dieses Journal, Bd. 86, S. 297. *H. Schröter*, Oberflächen zweiter Ordnung, Leipzig 1880, § 13, § 27.

**) *Th. Reye*, der gegenwärtige Stand unserer Kenntnis der kubischen Raumkurven, übersichtlich dargestellt. Festschrift der Mathem. Gesellschaft in Hamburg, Leipzig 1890, S. 56.

10. ***Tetraeder mit Höhenschnittpunkt auf der gleichseitigen Hyperbel.*** Durch die gleichseitige Hyperbel gehen wegen der dreirechtwinkligen Asymptotenrichtungen nur gleichseitige Hyperboloide und Kegel. Zu einer beliebigen Ebene gibt es eine senkrechte Doppelsekante. Das Büschel der durch sie und $\mathfrak{H}^3$ gehenden gleichseitigen Hyperboloide schneidet die Ebene in einem Büschel gleichseitiger Hyperbeln; es folgt:

Jede Ebene schneidet die gleichseitige $\mathfrak{H}^3$ in einem Dreieck ABC, dessen Höhenschnittpunkt von der zur Ebene senkrechten Doppelsekante h eingeschnitten wird.

Diese Doppelsekante h schneide die $\mathfrak{H}^3$ in D und E. Das Tetraeder $ABCD$ besitzt einen Höhenschnittpunkt H, weil eine Höhe durch den Höhenschnittpunkt des gegenüberliegenden Dreiecks geht. Die vier gleichseitigen Kegel, welche die $\mathfrak{H}^3$ aus A, B, C, D projizieren, enthalten die Höhenstrahlen der Dreikante $A\,(BCD)$ usw., und diese sind zugleich die Höhen des Tetraeders mit Höhenschnittpunkt, sie schneiden sich also in H. H liegt auf $\mathfrak{H}^3$ und muß folglich mit E zusammenfallen.

Auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen ∞^3 Tetraeder mit Höhenschnittpunkt, und der Höhenschnittpunkt liegt auch auf der Hyperbel.

Jedes auf der $\mathfrak{H}^3$ gelegene Dreieck gehört zu einer solchen Konfiguration von fünf Punkten, deren jeder Höhenschnittpunkt des von den vier anderen gebildeten Tetraeders ist. Liegen umgekehrt fünf Punkte in dieser Konfiguration vor, so werden alle durch sie hindurchgehenden Kurven dritter Ordnung von diesen Punkten aus durch fünf gleichseitige Kegel projiziert, die sicher keinem Büschel angehören.

Alle Raumkurven dritter Ordnung durch fünf Punkte in der Konfiguration von fünf Tetraedern mit Höhenschnittpunkt sind gleichseitige Hyperbeln.

Schneiden sich zwei gleichseitige kubische Hyperbeln in fünf Punkten, so sind es die fünf Punkte von fünf Tetraedern mit Höhenschnittpunkt. Denn von jedem der fünf Punkte aus werden die beiden $\mathfrak{H}^3$ durch zwei gleichseitige Kegel projiziert; die vier gemeinsamen Kanten, welche nach den vier anderen Schnittpunkten hinlaufen, bilden daher vier Dreikante mit Höhenkante; darum ist jeder der fünf Punkte Schnittpunkt der Höhenkanten, also auch Schnittpunkt der Höhen des von den vier anderen Punkten gebildeten Tetraeders.

Jedes geradlinige Hyperboloid durch fünf solche Punkte enthält zwei gleichseitige kubische Hyperbeln und ist darum selbst gleichseitig. Jedes geradlinige gleichseitige Hyperboloid durch die vier Ecken eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt geht auch durch diesen.

11. *Beliebige Tetraeder auf der gleichseitigen Hyperbel.* Ist $ABCD$ ein beliebiges der gleichseitigen $\mathfrak{H}^3$ eingeschriebenes Tetraeder — d. h. ein Tetraeder ohne Höhenschnittpunkt, — so bestimmen seine Höhen ein Hyperboloid, das „Höhenhyperboloid", dessen Leitschar die vier in den Höhenschnittpunkten der vier Tetraederdreiecke auf ihren Ebenen errichteten Normalen enthält. Diese Geraden sind aber nach 10. Doppelsekanten der $\mathfrak{H}^3$, und es folgt:

Das Höhenhyperboloid eines beliebigen der gleichseitigen $\mathfrak{H}^3$ eingeschriebenen Tetraeders geht durch die $\mathfrak{H}^3$ in der Weise hindurch, daß die Geraden der Höhenschar einfache Sekanten sind.

Die gleichseitigen $\mathfrak{H}^3$ durch vier beliebige — nicht ein Tetraeder mit Höhenschnittpunkt bildende — Punkte müssen alle auf dem zugehörigen Höhenhyperboloid liegen und die Höhenschar zur Schar der einfachen Sekanten haben. Andererseits ist jede $\mathfrak{H}^3$ des so definierten Systems, von welchem durch jeden Punkt des Hyperboloids eine Kurve bestimmt ist, eine gleichseitige $\mathfrak{H}^3$. Denn da die Höhenkante jedes Dreikants eines Tetraeders dem Höhenhyperboloid angehört, so wird jede solche Raumkurve dritter Ordnung von den vier Punkten aus durch vier gleichseitige Kegel projiziert, die sicher keinem Büschel angehören.

Durch vier beliebige Punkte, welche nicht ein Tetraeder mit Höhenschnittpunkt bilden, gehen ∞^1 gleichseitige Hyperbeln; sie liegen auf dem Höhenhyperboloid des Tetraeders und haben die Höhenschar zur Schar einfacher Sekanten.

Durch fünf beliebige Punkte geht i. A. keine gleichseitige Hyperbel, es sei denn, daß einer — und dann gleich jeder von ihnen — auf dem Höhenhyperboloid der vier anderen gelegen ist. In diesem Fall geht eine gleichseitige Hyperbel durch die fünf Punkte.

Liegt eine gleichseitige Regelschar vor, so kann man auf ihrer Fläche zwei Punkte beliebig annehmen, A, B, um ein Tetraeder zu bestimmen, für welches sie Höhenregelschar ist. Legt man nämlich durch A die Ebene, welche auf der Erzeugenden durch B senkrecht steht, durch

B diejenige, welche zu der Erzeugenden durch A normal ist, so schneidet die Schnittgerade der beiden Ebenen die Fläche in zwei Punkten C und D. Das Höhenhyperboloid des Tetraeders $ABCD$ hat mit dem gegebenen die Erzeugenden durch A und B und die beiden in den Hilfsebenen gelegenen gleichseitigen Hyperbeln gemein und ist folglich mit ihm identisch. Jede gleichseitige Regelschar ist daher Höhenregelschar für ∞^4 ihr eingeschriebene Tetraeder. Daraus folgt weiter, daß jede aus einfachen Sekanten einer gleichseitigen $\mathfrak{H}^3$ bestehende gleichseitige Regelschar Höhenregelschar von ∞^2 der $\mathfrak{H}^3$ eingeschriebenen Tetraedern ist, und daraus wieder: Auf jedem gleichseitigen Hyperboloid verlaufen ∞^3 gleichseitige kubische Hyperbeln, die sich entsprechend den beiden Regelscharen in zwei Systeme spalten.

12. *Orthogonale Sechsecke auf der gleichseitigen* $\mathfrak{H}^3$. Wir nennen ein windschiefes Sechseck „*orthogonal*“, wenn die Ebene von je dreien seiner Punkte auf der Ebene der drei übrigbleibenden senkrecht steht.

Ist $ABCDEF$ ein orthogonales Sechseck, so muß die Verbindungsebene von EF mit A (bzw. mit B, C, D) auf der Ebene BCD (bzw. ACD, ABD, ABC) senkrecht stehen; jede der vier Ebenen enthält also eine Höhe des Tetraeders $ABCD$, und EF schneidet alle vier Höhen. Je zwei von den sechs Punkten eines orthogonalen Sechsecks liegen also auf einer Leitgeraden der Höhenschar des von den vier anderen Punkten gebildeten Tetraeders. Hierbei, wie im folgenden immer, ist angenommen, daß keine vier der sechs Punkte ein Tetraeder mit Höhenschnittpunkt bilden. Die Höhenhyperboloide der Tetraeder $ABCD$ und $ABCE$ schneiden sich außer in der im Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC auf seiner Ebene errichteten Normalen in der kubischen Raumkurve durch die sechs Punkte A, B, C, D, E, F. Die Höhenhyperboloide aller 15 im orthogonalen Sechseck enthaltenen Tetraeder gehen daher durch diese Raumkurve, und da sie sicher in keinem Büschel enthalten sind, so folgt:

Die Raumkurve dritter Ordnung, welche einem orthogonalen Sechseck umschrieben ist, ist eine gleichseitige kubische Hyperbel.

Schneidet man eine gleichseitige $\mathfrak{H}^3$ mit zwei orthogonalen Ebenen in den Dreiecken ABC und DEF, so trifft AB das Lot von C auf die Ebene DEF, gehört also der Leitschar der Höhenregelschar des Tetraeders $CDEF$ an, weil diese sich ja nach 11. auf die gleichseitige $\mathfrak{H}^3$ stützt. Die Ebenen ABD, ABE, ABF schneiden daher in die Höhenregelschar

die Lote von D, E, F auf die Ebenen CEF, CDF, CDE ein und stehen folglich auf diesen senkrecht. Das gleiche beweist sich ebenso von jedem Gegenebenenpaar des Sechsecks $ABCDEF$.

Je zwei senkrechte Ebenen schneiden eine gleichseitige kubische Hyperbel in sechs Punkten eines orthogonalen Sechsecks.

Auf einer gleichseitigen kubischen Hyperbel gibt es ∞^5 orthogonale Sechsecke. Fünf Punkte kann man beliebig wählen, dann ist der sechste eindeutig bestimmt, es sei denn, daß die fünf Punkte bereits in der Beziehung von fünf Tetraedern mit Höhenschnittpunkten stehen; in diesem Falle ist der sechste Punkt ganz beliebig. Hierin ist die Konstruktion eines orthogonalen Sechsecks enthalten: Vier Punkte kann man beliebig wählen, der fünfte ist auf dem zugehörigen Höhenhyperboloid willkürlich, der sechste ist dann auf der einzigen durch die fünf Punkte gehenden gleichseitigen kubischen Hyperbel eindeutig bestimmt.

Nimmt man fünf beliebig gelegene Punkte einer gleichseitigen kubischen Hyperbel und legt durch je zwei von ihnen die Ebene senkrecht zu der Ebene der drei anderen, so laufen alle diese zehn Ebenen durch einen sechsten Punkt der gleichseitigen kubischen Hyperbel.

Bemerkt sei schließlich, daß die gleichseitige kubische Hyperbel in zwei sich rechtwinklig kreuzende, windschiefe Geraden und die Gerade ihres kürzesten Abstandes zerfallen kann, und daß die Übertragung der vorstehenden Sätze auf diesen Spezialfall zu beachtenswerten Sätzen der elementaren Stereometrie führt.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 141.

Heft 4.

Ausgegeben den 17. September.

Berlin W. 35

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1912.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Jeder Band 16 Mark.

Band 141. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

Jentzsch, R., Über Integralgleichungen mit positivem Kern . . . . . Seite 235
Remak, R., Über die Zerlegung der kommutativen Gruppen in zyklische teilerfremde Faktoren . . . . . — 245
Föppl, L., Stabile Anordnungen von Elektronen im Atom . . . . . — 251
Vogt, W., Metrische Untersuchungen der kubischen Hyperbel, insbesondere der gleichseitigen . . . . . — 303

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

MATHEMATISCHE WERKE

AUS DEM VERLAGE VON GEORG REIMER IN BERLIN

Baer, O., Éléments d'algèbre à l'usage des classes moyennes du collège royal français. 8. 1885 . . . . . geb. 2.50

— — Éléments de géométrie plane à l'usage des élèves du collège royal français. 8. 1887 geb. 3.—

Ball, Rob. S., theoretische Mechanik starrer Systeme. Auf Grund der Methoden und Arbeiten Ball's herausgegeben von H. Gravelius. Mit 2 Abbildungen. 8. 1889 . . . . . 14.—

Borchardt, C. W., gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von G. Hettner. Mit Borchardts Bildnis. 4. 1888 . 17.—

Brunn, Hermann, Beziehungen des du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Ovaltheorie. Eine mathematische Studie. 1905 . . . . . 7.—

Budde, E., allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme. Ein Lehrbuch für Hochschulen. I. Band: Mechanik der Punkte und Punktsysteme. 8. 1890 . . . . . 7.—

— — II. Band: Mechanische Summen und starre Gebilde. 8. 1891 . . . . . 8.—

Burrau, Dr., Carl, Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus. Mit den natürlichen sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument (Kreis- und Hyperbelfunktionen). 1907 . . . . . geb. 4.—

Crelle, A. L., Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen; mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1 bis 1000. Besorgt von O. Seeliger . . . . . 15.—

Dirichlet, G. Lejeune, Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften. 4.

I. Band. Herausgegeben von L. Kronecker. Mit Dirichlets Bildnis. 1889 . . . . 21.—

II. Band. Herausgegeben von L. Kronecker, fortgesetzt von L. Fuchs. 1897 . . . 18.—

Eisenstein, G., mathematische Abhandlungen, besonders aus dem Gebiete der höheren Arithmetik und der elliptischen Funktionen. Mit einer Vorrede von Gauß. 4. 1847 . . 4.—

— — Tabelle der reduzierten positiven ternären quadratischen Formen nebst den Resultaten neuer Forschungen über diese Formen in besonderer Rücksicht auf ihre tabellarische Rechnung. 4. 1851 . . . . . 1.—

Emmerich, Dr., A., Die Brocardschen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreieks. Mit 50 Figuren im Text und einer lithogr. Tafel. 8. 1891 . . . . . 5.—

Gravelius, H., fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Dezimalteilung der Quadranten, mit ausführlichen Tafeln zum Übergang von der neuen Teilung des Quadranten in die alte und umgekehrt. Nebst vierstelligen Tafeln der Zahlenwerte der trigonometrischen Funktionen, sowie gewöhnlichen Logarithmentafeln und Quadrattafeln. Mit einem Vorworte von Professor Dr. W. Förster, Direktor der Königl. Sternwarte zu Berlin. 8. 1886 . . . . . geb. 6.—

Haentzschel, E., Studien über die Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Anhang zu Heines Handbuch der Kugelfunktionen. 8. 1893 6.—

Heine, E., Handbuch der Kugelfunktionen. Theorie und Anwendungen. I. Band: Theorie (vergriffen). 1878 — II. Band: Anwendungen. 1881 . . . . . 6.—

Jacobi, C. G. J., gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften. 4.

I. Band. Herausgegeben von C. W. Borchardt. Mit dem Bildnis Jacobis. 1881 . . 18.—

II.—VII. Band. Herausgegeben von K. Weierstraß. 1882—1891 . . . . . 99.—

Supplementband. Vorlesungen über Dynamik. Herausgegeben von E. Lottner. 1884 . 10.—

MATHEMATISCHE WERKE

AUS DEM VERLAGE VON GEORG REIMER IN BERLIN

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Karl Ohrtmann. Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von Felix Müller, Albert Wangerin, Erich Salkowski, sowie der Berliner Mathematischen Gesellschaft, herausgegeben von Emil Lampe.

Bis jetzt erschienen 40 Bände zu verschiedenen Preisen.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. I. Band. 1890—91. 8. 1892 . 7.60
— — — — II. Band. 1891—92. 8. 1893 . . . . . 4.50
— — — — III. Band. 1892—93. 8. 1894 . . . . . 16.—
— — — — IV. Band. 1894—95. 8. 1897 . . . . . 16.—

Joachimsthal, F., Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Dritte Auflage, verbessert und durch einen Anhang von Aufgaben und deren Lösungen vermehrt von O. Hermes. Mit 8 Figurentafeln. 8. 1883 . . . . . 3.60

Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben von K. Hensel. Jährlich erscheinen etwa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band . . . . . 16.—

Bis jetzt erschienen 141 Bände.

Kronecker, L., Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Festschrift zu E. E. Kummers 50jährigem Doktor-Jubiläum am 10. September 1881. 8. 1882 6.—

Müller, Felix, Karl Heinrich Schellbach. Gedächtnisrede gehalten in der Aula des Königl. Friedrich-Wilhelm-Gymnasiums am 29. Oktober 1892. Mit einem Bildnis Schellbachs. 8 —.50

Peters, J., neue Rechentafeln für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. 1909 . . . . . geb. 15.—

— — fünfstellige Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten.

Erscheint in Kürze.

Schellbach, K. H., neue Elemente der Mechanik, dargestellt und bearbeitet von G. Arendt Mit 12 Figurentafeln. 8. 1860 . . . . . 5.50
— — die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Funktionen. 8. 1864 . . 6.—
— — über die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien. 8. 1887 . . . . . —.80

Schulte-Tigges, A., philosophische Propädeutik auf naturwissenschaftlicher Grundlage für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. 2. Auflage. 1904 . . . . . 3.—

Steiners, J., gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften. Herausgegeben von K. Weierstraß. 8.
I. Band: Mit 44 Tafeln und Steiners Bildnis. 1881 . . . . . 16.—
II. Band: Mit 23 Tafeln. 1882 . . . . . 18.—

Wiecke, P., Lehrproben. Geometrische und algebraische Betrachtungen über Maxima und Minima. Zum Gebrauch in den oberen Klassen höherer Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht als Vorbereitung für den Besuch deutscher Hochschulen. Mit Figuren im Text und 7 Tafeln. 8. 1894 . . . . . kart. 5.—

Wolff, F., Lehrbuch der Geometrie. 8.
1. Teil. Ebene Elementargeometrie, Trigonometrie, Teilungslehre. 8. verbesserte Aufl. Mit 7 Kupfertafeln. 1870 . . . . . 5.—
2. Teil. Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Mit 2 lithogr. Tafeln. 5. verbesserte Aufl. 1872 . . . . . 3.—